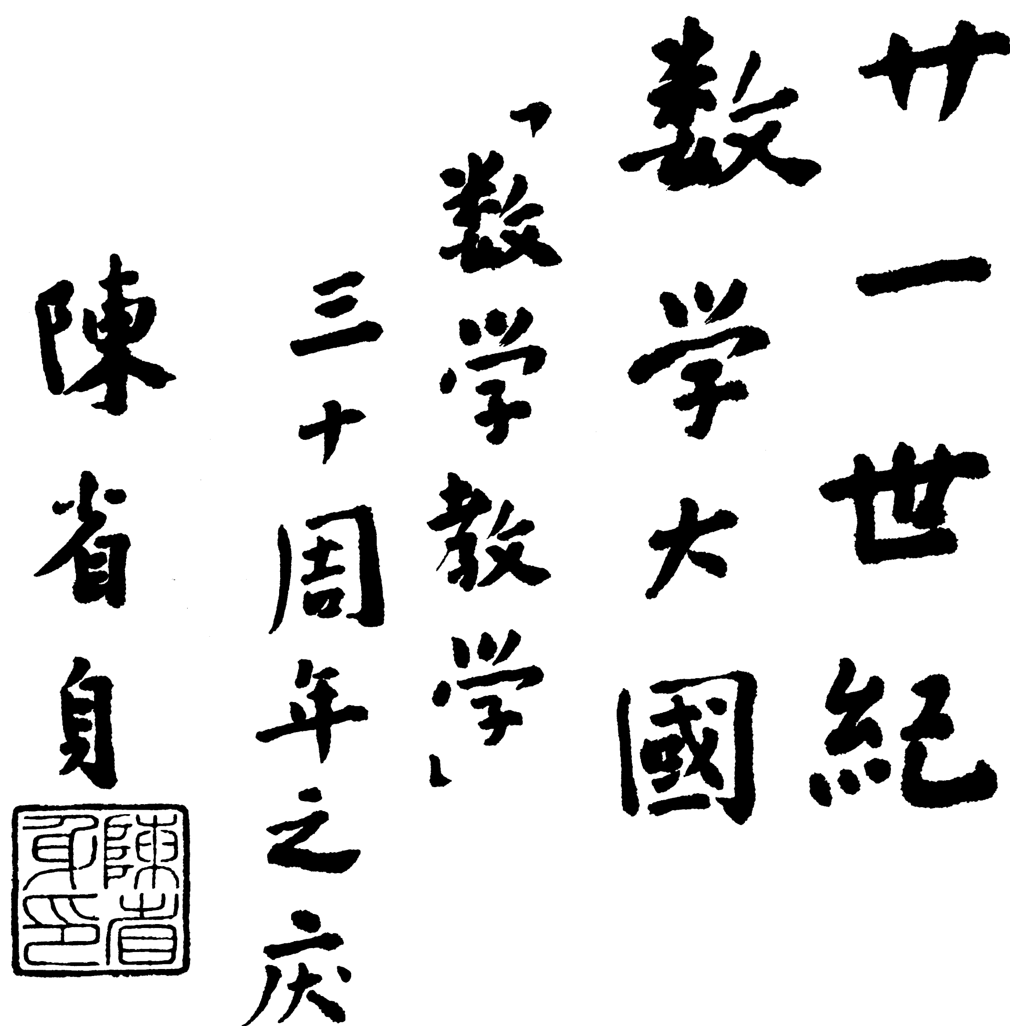
数学教学

2005年第1期

目 录



陈省身先生为本刊题词亲历记

邹一心

1985年6月, 正值本刊《数学教学》创刊30周年, 数学大师陈省身教授访问华东师范大学, 接受名誉教授的聘书. 在共进午餐时, 当时的华东师范大学数学系系主任胡启迪同志请陈省身先生为本刊题词, 陈先生欣然应允, 并嘱咐说:"我在嘉兴有一个报告, 到时可派人来取." 于是, 取题词的任务就荣幸地落在了我的身上.

陈先生是嘉兴市人. 举行讲座那天, 我大清早就兴致勃勃地前往嘉兴. 出了火车站, 见到处彩旗飘扬, 欢迎陈省身先生的到来, 如同节日. 当时, 我很惊讶: 一位数学家, 为什么能在家乡人民中有如此威望, 并获得如此由衷的

陈省身教授谈数学教育

张奠宙

定居南开的陈省身教授, 近来喜讯不断. 9月刚刚获得百万美元的邵逸夫数学奖, 11月2日又接受“陈省身星”的命名证书. 当天, 笔者在南开大学宁园的书房里和陈先生谈起数学教育. 以下是有关的访谈记录.

张: 听说您最近解决了 S^6 这个百年悬而未决的难题.

陈: 是的. 这是指6维球面上不存在复结构. 以前也有一些论文, 都不大对. 我从2002年下半年开始, 用一个巧妙的方法把它解决了. 我想把它在中国的数学杂志上发表, 已经在和上海的《数学年刊》接洽.

张: 您93岁高龄, 还能解决世界性的难题, 应该说破了世界纪录. 那么你为何能做到这一点呢?

陈: 我喜欢数学, 也只会做数学. 我不会欣赏音乐, 不喜欢体育, 也不大会做实验, 所以只好读数学, 做数学, 终老一生.

张: 这么说, 人不可以要求得太全面. 应该发挥每个人的长处才是. 反过来, 是不是也不应该要求每个人都学好数学呢?

陈: 我想也是. 钱钟书的数学很差, 可是依然是大学问家. 有些孩子很聪明, 善于动手, 又有艺术天赋, 何必拿数学来苛求他呢?

张: 可是, 世界上所有国家都把数学当作中小学的必修课, 也是考大学的必考科目.

陈: 那当然. 要求人全面发展是一种理想. 从多方面培养人也是对的. 只是不能用一把“理想”的尺子要求所有人. 中国的教育古训是“因材施教”. 现在中国的教育太注重“分数”, 人人用一个“总分”来衡量. 就象旧时科举一律拿“八股文” 的写作来选拔人才, 不大合理. 不拘一格选人才, 让孩子自由地发挥才能, 应该是我们追求的目标.

~~~~~~

爱戴? 下午, 听讲人群从四面八方拥向会场. 不一会, 大礼堂四周站满了人. 陈先生神采奕奕, 站立讲演. 他报告的内容, 虽事隔近20年, 但仍能清晰记得他从平面几何讲到微分几何, 一直讲到中国要成为“二十一世纪的数学大国”, 并鼓励大家多读书, 读现代的书、读名人的书.

讲演结束后, 由众多保卫人员簇拥着他离开会场. 我好不容易挤入人群, 自我介绍并说明来意后, 他与我亲切握手. 我记得那天天气晴朗, 他只穿着衬衫. 当时, 陈先生从随行人员处拿了一个包装得很讲究的纸卷交给我. 由于人多, 不及交谈. 我拿回纸卷, 小心翼翼地打开, 见外层是用厚纸卷的, 内层题词是用毛笔写在宣纸上, 苍劲有力. 大字是:“二十一世纪数学大国”, 旁侧小字是:“《数学教学》三十周年之庆”. 除了签名, 还加盖了红色印章. 显然, 这是陈先生精心制作的一幅书法珍品. 回上海后, 即去裱画店配了大镜框, 悬挂于《数学教学》编辑部墙上. 陈先生为本刊作如此重要的题词, 真是莫大的荣幸.

陈省身先生提出“21世纪数学大国”的口号, 一直激励着中国数学界不懈地为之奋斗. 1988年, 李铁映同志曾风趣地称这个题词为“陈省身猜想”, 并为了实现这个猜想, 创立了为数学专设的“天元基金”.

现在, 陈先生走了. 望着墙上这件珍贵的文物, 当时在嘉兴与我亲切握手时的笑容还浮现眼前. 我虽然已经退休, 但一定会继续发挥余热, 为建设21世纪数学大国竭尽绵力.
~~~~~~

张: 大多数人懂得一些必要的数学, 也是我们的目标.

陈: 数学是很有意思的科学. 所以我给孩子们题词: “数学好玩”. 数学课要讲得孩子们有兴趣. 孩子们都是有好奇心的. 他们对数学本来也有好奇心. 可是教得不好, 把数学讲得干巴巴的, 扼杀了好奇心, 数学就难了.

张: 数学有时是枯燥的, 例如背九九表.

陈: 小孩子记忆好, 背九九表也不难. 中国人背诵一些重要的东西有传统, 可以好好利用. 所谓“熟读唐诗三百首, 不会做诗也会吟”. 中国的数字都是单音节, 九九表读起来琅琅上口. 这种优势, 应该发扬.

张: 1989年的IAEP国际数学测试中, 中国大陆以80分的正确率在23个国家中排名第一.

陈: 高水平的国际奥林匹克数学竞赛, 中国学生也老是拿第一. 所以说, 中国的数学教育是不错的.

张: 最近以来, 中国向国外的流行教育理论学习, 引进了很多“后现代主义”的教育理论. 结果是认为中国的数学教育很落后, 美国的数学教育才是先进的.

陈: 中国千万不要学习美国的数学教育. 中国的数学教育在实践上肯定比美国好. 事实胜于雄辩. 中国好不容易有一项比美国好的数学教育成绩, 为什么自己不珍惜、不总结呢?

张: 美国中小学生的数学成绩不佳, 但是美国出了很多世界一流的数学家.

陈: 美国数学家很好, 但是很多都是移民. 美国吸引世界上最好的数学家到美国工作. 至于说在美国本土产生年轻数学家, 实际上和美国的基础教育关系不大. 我一直认为, 好学生不是“教”出来的. 只要数学环境好, 好学生有自动的能力, 自己可以成长. 现在我们主要是讨论对大多数中小学生的数学教育问题.

张: 我也注意到杨振宁先生在台湾评论中国教育现状时说: “90%的小孩, 用中国传统教育较扎实……, 我总觉得太把西方人的见解当成讨论的基础、焦点”[1] .

陈: 由于中国曾经长期处于比较落后的状态, 中国人往往会有“不如外国人”的心理. 我在数学上努力, 就是想打破这种心态. 我想证明, 中国人在数学上可以做得和外国人一样好, 甚至于更好. 中国的数学教育在某些方面也做得很好, 应该有自信. 当然, 自信决不是自满.

张: 最近, 在数学教育中强调“发现学习”和“合作学习”, 您怎么看?

陈: 能够发现当然好. 问题是发现什么, 如何发现.

张: 有一堂小学生的关于加法、乘法交换律的教案. 就要求学生自己“猜想”和“发现”交换律, 并把它和“四色猜想”相比拟. “发现”之后, 还举例说明交换律的日常应用: “当用很长的柄的勺子自己无法给自己喝水时, 可以两个人交换地给对方喝.”[2]

陈: 交换律在小学不要教. 加法、乘法服从交换律, 无须去猜想、发现,“做”就是了. 只有到出现“非交换”情形时, 才需要认识交换律的重要性. 交换律的本质是“交换次序”后, “和”与“积”不改变. 至于给对方喝水, 那与数学交换律无关.

张: 现在时兴小学生每堂课都要自己“发现”, 而且是合作讨论地发现. 数学家常常合作发表文章, 请谈谈“合作”的经验.

陈: 数学是自己思考的产物. 首先要能够思考起来, 用自己的见解和别人的见解交换, 会有很好的效果. 但是, 思考数学问题需要很长的时间. 我不知道中小学数学课堂是否能够提供很多的思考时间. 我现在还给大学生上课. 在大学数学课堂里, 没有时间让学生去“合作发现”, 主要是教师“示范讲解”.

张: 您对中国数学教育有怎样的期望?

陈: 走自己的路, 不要学美国的数学教育. 我们的学生基础比较好, 应当保持. 然后注意创造性, 使学生对数学发生兴趣, 觉得“数学好玩”. 我希望, 中国的中小学课堂里能够走出一大批世界一流的数学家.

访谈后记

从2002年开始, 我正式为陈省身先生写传.

于是, 我几次到天津访问, 就住在陈先生家里. 趁一起吃饭, 听陈先生谈自己的经历和人生. 传记终于在2004年9月出版, 他在200本传记上签名, 送给亲朋好友, 着实让他忙过一阵.

11月初, 我从东北师大访问路过天津, 又到宁园住了三天. 陈省身先生刚刚度过93岁生日, 满屋是祝贺的花篮. 他告诉我, 美国的私人医生刚刚来看过他, 说身体很好, 只是血糖稍稍偏高而已. 大家都很高兴. 说起《陈省身传》的出版, 他几次说:"你比我知道我还要多". 在几天的闲谈中, 我还整理了一份"大师谈数学教育"的访谈录, 他也过目了. 我把它送给《文汇报》, 请他们首发. 一切都象往常一样宁静、祥和.

不料仅仅一个月之后, 12月3日晚间噩耗遽然传来. 接听电话的时候, 头脑轰的一声, 好象听见什么又好象没有听见. 放下电话, 依然不敢相信自己的耳朵, 觉得这也许不是真的. 我连忙打电话到南开胡国定先生家里, 才确信陈先生真的走了. 那晚一夜无眠, 眼前一直晃动着大师的亲切笑容.

我认识陈先生已经近20年. 为了写他的传记, 多次和他谈话. 我告诉他我在做数学教育的研究. 他一直未置可否. 流露的意思是, 教育学还不是一门真正的科学, 经验性的成分太多. 这次再见到陈先生, 就打算重点问问他对数学教育、特别是对打好基础的看法. 原因是12月在南宁要举行主题为"基础与创造"高级研讨班, 2005年8月在上海举行的第三届东亚数学教育会议, 主题也是基础与创造.

后来知道, 陈先生是11月29日发病住进医院的. 也正在那一天,《文汇报》在"教育家"版上刊登了"大师谈数学教育"的报道. 可以想见, 这是陈省身大师生前最后的一篇正式发表的谈话. 为了让更多的数学教育工作者了解这篇谈话, 我建议在本刊重发, 算是对老人家的一种悼念.《文汇报》发表时有一些不大的改动, 这里则是陈省身先生曾经过目的全文.

陈省身先生是在世界数学史上占有重要地位的大师, 为人类的科学事业做出了宝贵的贡献. 他属于全世界. 现在, 陈先生已经离我们而去. 作为访谈的记录者, 深感我们后辈身上责任的重大. 我们应当有自信, 既不妄自菲薄, 也不故步自封, 不辜负他老人家的殷切期望, 踏踏实实地把中国的数学教育事业办好.

参考文献

[1] 台湾《联合报》2002年11月3日.

[2] 王俊 曹平. "探索交换律"课堂实录与评析.《小学青年教师》2004年9月号. 第29-31页.

【编者按】国际著名数学大师陈省身教授生前重要讲演曾整理成文"谈谈中国数学的发展",并发表在本刊1995年第1期杂志上. 文中提出了关于"好的数学"、"不太好的数学"等重要思想. 为纪念陈省身教授逝世, 本刊特重新刊登此文.——编者

谈谈中国数学的发展

陈省身

【编者按】国际著名数学大师, 南开数学研究所名誉所长陈省身教授, 应上海数学会的邀请, 于1994年11月6日在上海科学会堂向青年数学家作讲演. 各大学数学系的年轻学者, 研究生以及其他数学工作者共一百余人到会. 演讲会由上海数学会理事长胡和生院士主持. 谷超豪院士也出席了会议. 承蒙陈教授同意, 将演讲内容摘要在本刊发表.

很高兴有机会和大家见面. 我想我们共同关心的问题是如何发展中国的数学. 我觉得其中最关键的一点是如何培养中国自己的高级数学人才. 就目前的情形来说, 中国训练自己的年轻数学人才, 应该不难做到. 因为中国现在已经有了一批优秀的数学家, 许多中国大学培养的数学博士, 学术水平不亚于国外的博士. 我所在的南开数学所, 就有一位吉林大学毕业的数学博士, 能力很强. 我将他介绍到德国的Mainz大学, 随Kreck教授做研究. Kreck是后起的拓扑学家, 这位博士工作一年后, 于今年春节回国. 由于工作出色, 他已接到两项邀请, 再去国外合作研究. 我们鼓励他多到各地去访问. 几年来, 我们派了一些年轻人出去, 现在陆续回来了, 人数还不太多, 但已开始起作用. 美国这几年经济不好, 找数学的职位很难. 这一情况恐怕还得继续一个时期. 到国外去, 不必去读博士, 做博士后最好. 多一些人留在中国, 最终目的还是提高大学、研究院的数学水准.

当前中国数学发展的主要问题是经费不足. 虽说国家设立了专项支持数学研究的天元基金, 相当重视, 但数量毕竟不多, 分到下面就没有多少了. 我更关心研究生的待遇. 一些特别优秀的研究生可否给以特级奖学金? 假如上海每年资助二十名优秀生, 每月津贴500元的话, 一年所需经费不过十来万. 许多有力量的企业家资助这点钱, 设立专门的奖学金, 应该不太困难. 问题是我们的工作做得不够, 人家不了解.

现在读数学的人少了, 许多人都想去做生意.美国也是如此,国际性的.这倒没什么可怕. 对数学没有兴趣的人何必来读数学? 不真心念数学的学生不来也好. 人少些, 但精些, 更易出人才. 我们要帮助的是那些热爱数学的优秀人才. 我们搞数学的生活要改善, 但也不能太舒服. 住在上海的宾馆、饭店, 舒服得很, 菜烧得非常好吃, 可我觉得那未必是做数学的地方. 做数学的人是另外一种享受, 大家聚在一起, 互相谈谈. 一旦有了一个得意的想法(Idea), 无论简单的还是重大的, 都是一种最高的享受. 数学这个职业, 生活相对比较清苦, 发不了财, 但有一个好处, 就是比较保险. 做一个数学家至少得下十年苦功, 不是什么人都能来顶替的. 别人很难来抢你的饭碗, 所以说"保险". 我个人觉得, 读数学的人不必太多. "大家不想读数学", 在某种意义上来说, 反倒可能支持真正的数学研究者. 国外读数学的人少, 也许正是中国成为"数学大国"的机会. 当然, 我们希望中国数学家的待遇能逐渐追上国际水平.

以下我想说怎样做数学. 中国人应该搞中国自己的数学, 不要老是跟着人家走. 前些年刚开放, 请一些国际上最好的数学家来, 了解

人家的工作, 欣赏他们的成果, 那是很必要的. 但是中国数学应该有自己的问题, 即中国数学家在中国本土上提出, 而且加以解决的问题. 数学不像其他学科, 几乎全世界都必须同时攻一两个大问题, 而是有很大的选择自由. 我们可以根据自己的情况, 挑选自己的数学研究课题. 题目不必都选热门的. 我过去做微分几何时, 在当时是冷门. 有些东西似乎很老, 过时了. 其实未必. Sophus Lie引进连续群理论, 写了三卷本的《变换群理论》, 里面还有许多思想可以进一步挖掘和发展, 仍有现实意义.

那么应该选择怎样的课题呢? 哪些是"好"的问题? 哪些是不大好的问题? 这没有一定的挑选方法, 各人的标准也不同. 有些人总把自己做出来的东西说成是最好的, 那往往不对. 在香港时我们有机会谈到过这一点, 我提议看看公认的大数学家提出的、研究的是什么问题(见香港天元基金会1994年9月6日演讲, 讲稿将刊于《数学进展》).

20世纪开始的那一年, 1900年, 希尔伯特在巴黎举行的国际数学家大会上提出了23个数学问题, 对本世纪的数学发展有重大影响, 可以说影响了20世纪数学的各个方面. 希尔伯特关于好的问题提出了两个标准. 一个是清晰易懂. 他在那次演讲中引用法国拉格朗日(当时活着的最伟大的数学家)的话: "一种数学理论应该能向在大街上遇到的第一个人解释清楚". 清楚的、易于理解的问题会吸引人们的兴趣, 而繁复的问题却使我们望而却步. 另一个标准:问题应是困难的, 但又不能无法解决以致使人们白费气力.

希尔伯特在演讲中曾提到两个好的数学问题. 第一个是费马问题, 即

$$x^n+y^n=z^n\ (n\leqslant 3)$$

没有正整数解. 这一问题去年盛传已解决, 后来发现还有一条鸿沟没有填没. 最近又听说这个困难可以克服. 费马问题引发了代数数论的研究. 高斯年轻时写过"数论", 非常重要. 他的工作都是开创性的. 微分几何也是高斯奠基的. 后来希尔伯特也研究数论, 使他出名的最早工作就是"数论报告", 非常深刻, 至今仍有影响. 第二个问题是著名的"三体问题", 它是天体力学中一个十分自然的问题, 涉及许多分析、几何、拓扑的分支, 具有重要的应用. 庞加莱写了两大本书加以讨论. 最近项武义教授对此问题有新的见解. 总之, 希尔伯特的这一讲演值得一看. 美国数学会曾在1976年专门开会讨论希尔伯特的23个问题的进展情况.

说到好的数学问题, 我想起数学奥林匹克竞赛. 中国中学生在国际竞赛中获奖, 的确是中国青年的光荣, 我曾经多次表示赞赏和鼓励. 但是我认为那些数学竞赛题都不是好的数学题. 一个孩子在几小时里能作出来的, 一定缺乏深刻的含义. 有些题的解决当然需要技巧, 但这种技巧不是好的研究课题. 今年得诺贝尔经济学奖的Nash John是数学家, 也是我的朋友. 他会提出各种稀奇古怪的问题, 如他发现在欧洲地图上有四个城市恰构成正方形. 这当然是新发现, 却没有多大意思.

我无法非常明确地说出什么是好的数学问题, 但总要自己先选有较大意义的问题去做, 要有自己观念. 大家都注意做好的问题, 提出新观念, 我想我们一定会成功的.

最后, 我想说, 数学研究不能集中在一两个地方, 要全国各地都搞起来. 小地方往往会出现很好的数学家. 但是他们要受过严格的训练, 许多读了新闻报道而思考数学问题的人, 往往还不知道什么是"一个数学的争鸣"就动手做起数学来, 那是不成的. 研究数学还是要踏踏实实地打好基础.

(上接第1-35页)

诸位同行批评指正, 共同把今后的数学命题工作做好.

参考文献

[1] 周齐. 谈谈初中数学热点问题. 数学教学. 2004年第9期.

[2] 2004年上海市中等学校高中阶段招生文化考试数学试卷. 数学教学. 2004年第8期.

数学建模与中学数学

200062 华东师范大学数学系 袁震东

一、基础知识教学与学生能力的培养不能偏废

我国自隋大业二年(606年)确立科举制度到清末(1901年)废除科举制度, 科举文化影响我国达1300年之久. 中国的教育深受科举文化的影响, 崇尚考试成绩的思维定势根深蒂固.

在数学考试中, 通常以考核学生的知识水平为第一要务. 正确的数学价值观和情感因素难以考核, 因此常常被排斥在考试之外. 在以入学考试成绩作为准入标准的情况下, 数学教学异化为解题技术的教学. 学生学了数学不知数学的本质、不能掌握数学的思想方法, 许多学生成了解题的"机器".

数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学. 数学问题来源于实际问题. 进行数学建模教学有利于学生形成正确的价值观和数学观. 数学建模教学强调合作学习和团队精神, 有利于培养学生服务社会的思想情感. 数学建模已经在教材内容、教学方法方面产生了深刻的影响, 对于课程改革起着推动作用. 数学建模教学是以培养学生解决实际问题的能力为目标的.

培养解决问题的能力是离不开基础知识与基本训练的, 有些专家甚至把解决实际问题能力的培养包括在基本训练的教学之内. 但是数学建模教学与基础知识、基本训练的教学还是不同的.

基础知识的教学更重视知识的形成过程、知识产生的情景和学生的认识和记忆过程; 基本训练重视学生运算能力、逻辑思维能力、空间想象能力和解决一般问题的能力. 而数学建模教学更重视知识的综合应用和学生解决实际问题能力的培养.

《普通高中数学课程标准(实验稿)》指出: "高中数学课程设立数学探究、数学建模等活动, 为学生形成积极主动的、多样的学习方式进一步创造有利的条件, 以激发学生的数学学习兴趣, 鼓励学生在学习过程中, 养成独立思考、积极探索的习惯."

"20世纪下半叶以来, 数学应用的巨大发展是数学发展的显著特征之一. 当今知识经济时代, 数学正从幕后走向台前, 数学和计算技术的结合, 使得数学能够在许多方面直接为社会创造价值." "近几年来, 我国大学、中学数学建模的实践表明, 开展数学应用的教学活动符合社会需要, 有利于激发学生学习数学的兴趣."

我们认为学科基础知识学习与解决实际问题能力的培养两者都不能偏废. 历史的经验告诉我们偏废其中一个方面都会产生不良后果.

如果只重视基础知识和基本训练教学, 忽视综合运用能力的培养, 那么其结果很容易产生"题海战术"、"应试教育"等现象. 反过来, 如果过分强调能力培养, 忽视基础知识教学, 甚至于实行脱离学科的能力考试, 使考试变成智力测验, 那么其结果使学生的知识支离破碎, 达不到提高学生数学素养的目的.

二、数学建模的基本元素

除了把实际问题形式化等元素外, 数学建模还具有下列特殊元素:

第一元素: 数学建模问题来源于实际问题, 它的条件往往是不充分的、数据是不完整的.

2004年全国普通高等学校招生统一考试上海数学试卷 (理工农医类) 的第16题: 某地2004年第一季度应聘和招聘排行榜前5个行业的情况列表如下:

行业名称	计算机	机械	营销	物流	贸易
应聘人数	215830	200250	154676	74570	65280
行业名称	计算机	营销	机械	建筑	化工
招聘人数	124620	102935	89115	76516	70436

若用同一行业中应聘人数与招聘人数比值的大小来衡量该行业的就业情况, 则根据表中数据, 就业形势一定是…………………………(　)

(A) 计算机行业好于化工行业;

(B) 建筑行业好于物流行业;

(C) 机械行业最紧张;

(D) 营销行业比贸易行业紧张.

正确答案是(B).

这个题目具有数学建模题的第一个元素: 条件的不充分性和数据的不完整性. 要正确解答这个问题学生必须知道:

(1) 应招比 (应聘人数与招聘人数比值) 愈小的行业就业形势愈好;

(2) 表中没有列出的行业其应聘 (招聘) 人数小于表中所列的最小的数.

这样我们得到:

建筑行业的应招比 $< \dfrac{65280}{76516} \approx 0.853$;

物流行业的应招比 $> \dfrac{74570}{70436} \approx 1.059$.

因此根据表中的数据, 建筑行业的就业形势好于物流行业. 从解题过程看到, 学生必须对就业形势的好坏有正确的认识, 会分析数据和进行比较. 这就是说, 解数学建模问题需要学生具有一定的社会、自然科学方面的知识和分析问题的能力. 只会死记硬背的人是解决不了问题的.

第二元素: 解数学建模问题需要做假设.

举例来说,

例1　某旅馆有150个客房. 经过一段时间的经营实践, 旅馆经理得到一些数据: 如果客房定价为160元, 入住率为55%; 每间客房定价为140元, 入住率为65%; 每间客房定价120元, 入住率为75%; 每间客房定价为100元, 入住率为85%. 欲使每天收入最高, 问每间住房的定价应是多少?

经分析, 为了建立旅馆一天收入的数学模型, 可作如下假设:

假设1: 在无其它信息时, 不妨设每间客房的最高定价为160元.

假设2: 根据经理提供的数据, 设随着房价的下降, 住房率呈线性增长.

假设3: 设旅馆每间客房定价相等.

模型建立

分析: 根据题意, 设y表示旅馆一天的总收入, x为与160元相比降低的房价.

由假设2, 可得每降低1元房价, 入住率增加为 $\dfrac{10\%}{20} = 0.005$,

因此旅馆一天的总收入为

$y = 150(160 - x)(0.55 + 0.005x)$ …… (1)

由于 $0.55 + 0.005x \leqslant 1$, 可知

$0 \leqslant x \leqslant 90$.

我们的问题是: 当 $0 \leqslant x \leqslant 90$ 时, 求y的最大值点, 即求解

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 90}\{y = 150(160-x)(0.55+0.005x)\}$$

解模型

把(1)左边除以 (150×0.005) 得

$y' = -x^2 + 50x + 17600$,

由于常数因子对最大值运算没有影响, 因此可化为求y'的最大值点, 利用配方法得

$y' = -(x - 25)^2 + 18225$,

显然当 $x = 25$, y' 最大, 因此可知

$x = 25$ (元).

最大收入对应的客房定价为

160元−25元=135元,

相应的入住率为

$0.55 + 0.005 \times 25 = 67.5\%$,

一天的最大收入为

$150 \times 135 \times 67.5\% = 13668.75$ (元).

第三元素: 解数学建模需要验证和讨论.

在数学建模过程中, 不仅要验证方程解的正确性, 而且要验证解与所作假设是否矛盾、是否与实际情况相符. 如果不符, 就得重新进行假设、建模、求解和验证, 直到完全相符为止.

例如, 上例的验证如下:

(1) 易验证此收入在已知各种定价对应收

入中是最大的, 事实上

定价	160 元/天间	140元/天间	120元/天间	100元/天间	135元/天间
收入	13200 元	13650 元	13500 元	12750 元	13668.75 元

如果为了便于管理, 那么定价140元/天间也是可以的, 因为此时它与最高收入只差18.75元.

(2) 如果定价是180元/天间, 住房率应为45%, 其相应收入只有12150元. 因此假设1是合理的. 事实上二次函数只有一个极值点25在[0,90]之内.

第四元素: 数学建模问题常常是开放性问题, 问题的解有时是不惟一的.

例如, 在上面的例子中, 住房定价可以是135元/天间, 也可以是140元/天间, 也可以是130元/天间(每天的总收入仍为13650元).

数学建模问题中有时同时含有上述四个元素, 有时只含有四个元素中的某几个元素.

寻找数学建模问题的关键是: 对实际问题的洞察和对问题可能是怎样的数学问题的估计. 数学建模需要数据, 但不一定都是有了数据再找模型. 明确问题后再收集数据的事也是常有的.

例2　一架波音747客机有450个座位. 如果每次航行只预售450张机票, 那么到飞机起飞时由于某些旅客不到会减少航空公司的收入. 因此许多航空公司用超额预订机票的办法来增加公司的收入. 然而超额预定机票有可能使某些订了机票的旅客乘不上飞机. 此时航空公司要付给他们一定的补贴, 以补偿这些乘不上这个航班的旅客的损失. 航空公司希望知道超额预定多少机票, 才是较好的方案.

这个实际问题虽然只有1个数据, 但问题十分清晰, 可以归结为公司利润的计算问题, 因此可作为数学建模问题来解.

假设1: 已订票旅客在航班起飞前(按时)到达机场是相互独立的随机事件.

假设2: 令f表示某航班飞行一次的费用(包括燃料费、付给机务人员和乘务人员的工资以及租用机场的费用等). 一架飞机满座与否对于f的影响不大, 因此在下面的讨论中f被看作一个定值.

建立模型

设一个已订票的旅客按时到达机场的概率为p, 未能按时到达的概率为$q=1-p$.

设航空公司售出的预售票为m张, 那么m人中有k人未能按时到达的概率为p_k,

$p_k=C_m^k q^k p^{m-k}$, $k=0,1,2,\cdots,m$.

这便是大家熟悉的二项式分布的概率公式.

设N表示飞机的座位数, g表示一个旅客所付的机票费, 那么

(1) $m=N$表示没有超额售票且飞机满座, 此时一次飞行的利润为

$S=Ng-f$.

(2) 如果超额订票, 那么$m>N$. 在不考虑补偿的情形下, m人中有k人未能按时到达机场, 此时一次飞行的利润为

$$S=\begin{cases}(m-k)g-f, & m-k\leqslant N\ (k\geqslant m-N),\\ Ng-f, & m-k>N\ (k<m-N).\end{cases}$$

由于"m订票人中有k人未能按时到达"是随机事件, 因此飞行利润是随机变量. 这时需用数学期望来考察, 设$\overline{S}$表示飞行利润的数学期望, 那么

$$\begin{aligned}\overline{S}&=\sum_{k=0}^{m}p_kS(k)\\&=\sum_{k=0}^{m-N-1}p_k(Ng-f)\\&\quad+\sum_{k=m-N}^{m}p_k[(m-k)g-f]\\&=(Ng-f)\sum_{k=0}^{m}p_k\\&\quad+\sum_{k=m-N}^{m}p_k(m-N-k)g\\&=Ng-f+g\sum_{k=m-N}^{m}p_k(m-N-k).\end{aligned}$$

解模型

令 $j=k-m+N$, 上式可化为

$\overline{S}=Ng-f-g\sum\limits_{j=0}^{N}jp_{j+m-N}$,

根据二项式分布的性质, m越大上式右边的第三项越小, $\overline{S}$越大.

因此问题的解是m取得越大越好.

讨论和改进

增大m会导致许多订了票的旅客乘不上飞机, 而影响航空公司的声誉. 因此对于超额预订应采取一定的惩罚手段, 以补偿"被挤掉者"的损失.

如果设b是每一位订了票而被挤掉的旅客所得的补偿, 那么一次飞行的利润公式应改为

$$S=\begin{cases}(m-k)g-f, & m-k\leqslant N,\\ Ng-f-(m-k-N)b, & m-k>N,\end{cases}$$

于是, 利润的数学期望为

$$\overline{S}=\sum_{k=0}^{m-N-1}p_k[Ng-f-(m-k-N)b]$$
$$+\sum_{k=m-N}^{m}p_k[(m-k)g-f].$$

利用二项式分布的数学期望, 经化简得

$$\overline{S}=mpg-f+(g+b)\sum_{k=0}^{m-N-1}p_k(N-m+k).$$

这个公式给出公司期望利润与各因子的关系.

验证和应用

已知飞机乘满60%的座位时, 机票的收入可以支付飞行费用, 即

$$f=0.6Ng,$$

利润期望值与飞行费用之比是衡量航空公司运行状况的指标, 那么这里有 $\dfrac{\overline{S}}{f}=\dfrac{1}{0.6N}\cdot\left[mp-\left(1+\dfrac{b}{g}\right)\sum_{k=0}^{m-N-1}p_k(m-N-k)\right]-1,$

设被挤掉的旅客数为ξ, 那么

$$p\{\xi\geqslant j\}=\sum_{k=0}^{m-N-j}p_k,$$

计算结果表明: 如果$N=300$, $q=0.05$, $b=0.2g$, 在售出预订票310张时,

$$\frac{\overline{S}}{f}=0.63574,$$
$$P\{\xi\geqslant 1\}=0.051,$$
$$P\{\xi\geqslant 5\}=0.002.$$

因此, 可以说有300个座位的航班预售310张票是可行的. 因为此时被挤掉5个人以上的概率几乎等于0, 至少有一个旅客被挤掉的概率也只有5%.

三、数学建模在中学数学教学中的地位和作用

1. 数学建模是开展探究性学习的好题材. 数学建模包含了合作学习、自主学习和探究性学习的诸多因素和作用. 数学建模是提高参与者数学素养的一种很好的形式. 越来越多的国内外数学教育工作者都有这样的认识: 数学知识的掌握不全是教出来的, 而是自己做出来的. 数学建模正好是一个学数学、用数学、做数学的过程, 它体现了学和用的统一.

2. 数学建模问题存在于我们的周围和日常生活之中. 例如, 如何收集数据解决人们关心的问题, 如红绿灯的切换时间、环保措施的效果等等. 让学生自己提出问题、解决问题可以培养学生关心社会、服务社会的习惯.

3. 通过解数学建模问题确实可以提高学生解决实际问题的能力, 做不做数学建模是不一样的.

目前中学数学教学中数学建模所占的比重太小, 高校入学考试中所占的比例很小. 这说明中学数学教育中数学建模的教学有待进一步加强.

四、关于中学数学建模教学的几点建议

1. 目前数学建模在中学里还没有广泛地展开. 开展数学建模教学的第一步是在部分学生中开设数学建模探究课.

2. 要在我国中学进行数学建模教学, 必须取得领导的支持.

3. 要开展好数学建模教学, 教师要学习必要的数学建模的知识.

参考文献

[1] 袁震东、蒋鲁敏、束金龙. 数学建模简明教程. 华东师范大学出版社. 2002年.

[2] 刘来福、曾文艺. 数学模型与数学建模. 北京师范大学出版社. 1997年.

[3] 袁震东等. 数学建模. 华东师范大学出版社. 1997年.

上海市初中六年级第一册数学教材的特点

上海市第二期课程改革初中数学新教材副主编 黄 华

上海市初中六年级第一学期数学教材在领导、专家、教师们的关心支持下终于面市了. 本册教材供上海市初中六年级学生第一学期数学学习使用, 由于学生刚进入初中, 其心理和年龄特征仍是小学生, 因此本教材的编制力图贯彻: 数学是有趣的, 数学是有用的, 数学的方法是美妙的, 数学的思想是浅显的理念; 通过操作体验数学, 通过观察发现数学, 通过探索感悟数学, 通过运用理解数学. 教材共三章, 第一章: 分数; 第二章: 比和比例; 第三章: 圆、圆柱、圆锥和球. 它有以下几个特点:

一、创新性

1. 引进实例新颖

分数与除法这节的导入是用分橙子引进的, 与以往的分纸和折纸引入是不同的, 不仅更现实,更贴近学生的生活,而且更具空间感和更直观, 学生更感兴趣、更易理解.

分数的基本性质通过折纸引入; 分数的大小比较是通过电缆线是否可穿入管子引入; 分数与小数的互化是通过水星、冥王星、月球的直径分别与地球直径的分数关系引入的······. 本教材力图通过用生动的、贴近生活的和新颖实例将数学的概念、性质转变为更易被学生接受的形态.

2. 重视操作实验

通过观察、操作去"做"数学是学生感悟数学的重要途径, 为此我们设计了一定数量的操作和演示, 如在学习扇形时设计了陀螺上放置的三原色圆片, 从而引进弧长和扇形等概念; 在学习测量圆周长的时候介绍了多种测量方法, 特别在如何计算球的表面积时, 我们设计了用细绳盘绕覆盖在半球面上, 然后将细绳重新缠绕并平放在桌面上, 形成一个圆从而计算出这个圆面积, 用这个圆面积去估计球的表面积. 又设计了另外的实验, 将一个橙子皮剥成一小块一小块拼成圆形再估算球的表面积. 本教材中约有十多个实验操作; 通过这些操作实验不仅仅是想为一线教师的教学及学生的体验提供较大的便利, 而且希望教师在教学中能体会到数学也是可以实验的, 也是能亲身体验的, 并希望教师们能在教学中设计出更多和更有启发性的实验, 使学生有亲身操作体验的过程.

3. 渗透数学思想

数学教育中发展学生的思维是至关重要的, 在本教材编写中也注意渗透数学思想. 在分数的运算中,将整数看作为特殊的分数, 渗透了特殊化的思想; 在圆柱、圆锥、球的引进时用旋转产生, 渗透了数学运动的观点; 在导出圆面积、圆柱的体积公式时, 渗透了"化曲为直"的思想以及无限逼近的思想; 通过渐进式的过程, 使学生感悟到数学的思想和精神. 有特殊到一般的思想, 从实例到概括; 也有从一般到特殊的思想, 如分数乘法的意义, 是从一般的分数乘法的意义到正整数与分数的乘法.

二、趣味性

使用本教材的对象是六年级学生, 因此将较为枯燥的数学知识形态转变为学生喜爱和可理解的教育形态, 是我们一直思考的问题, 为此在教材中设计了三个漫画人物小丽、小明、小杰穿插其中, 调节气氛. 还设计了一个河马博士, 主要起一个穿针引线及指导学生的作用. 这些人物的穿插使知识内容的呈现变得更加活泼. 在知识引进时, 我们尽可能用有趣和贴近学生生活的例子和照片. 我们希望以生动活泼的形式,引起学生的兴趣; 以具有冲击力的照片

数学语言形态转换对培养思维的作用

201418 数学思维训练左右脑协调研究中心 上海师范大学四附中 章志强

数学语言(包括自然语言、符号语言和图象语言三种形态)是数学特有的形式化符号体系. 语言是数学思维(结晶)的载体, 知识借助语言而传输交流. 不少数学问题的解决, 实质上不过是不同语言形态的互译而已. 因此, 各种语言形态之间的转换能力的训练是提高思维能力的重要途径.

一、运用图象语言加深对重要概念的理解

高三复习函数概念时, 很多学生对函数概念的文字叙述早已淡忘, 但却能用映射的图示来理解函数概念. 这给我很深的启示, 图象语言留给学生的记忆是最深刻的, 图示浓缩了知识, 又给人以直观的印象, 它可以成为我们思维的起点, 又是我们思维终点(把重要概念化归为图示).

美国数学家斯蒂恩说"如果一个特定的问题可以转化为图形, 那么, 思想就整体地把握了问题, 并且能创造性地思索问题的解法."

这表达了运用形象思维者的共同体验. 教学中若能经常配以图形来表达概念, 就能取得事半功倍的效果.

下面举几个利用图示来表示重要概念的例子.

符号化的概念	图象语言	说明(自然语言)
函数: $y=f(x)$, $x\in D$.	$x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots \to y_1, y_2, y_3, \cdots$	对于实数集 D 中的每一个元素 a, 实数集 A 中都有惟一确定的元素 b 与它对应(通常记作 $b=f(a)$), 这样的对应我们称为函数关系.
数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.	$A-\varepsilon$ A $A+\varepsilon$	对于任意小的正数 ε, 总存在正整数 N, 当 $n>N$ 时, $a_n\in(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$.

(图片), 吸引学生的眼球; 以动手操作, 激发学生学习数学的兴趣.

三、基础性

本课程是全市六年级学生的基础性课程, 加强基础是我国数学教育的一大特色, 这也是课程标准所强调的, 六年级分数的运算基础必须扎实, 因此无论在例题和练习中都得到了足够的重视. 同时根据课程标准, 在分数中我们去除了负分数及运算(放到以后的有理数章节)、繁分数等知识内容, 也去除了分数的某些繁琐的运算, 同时也有适量的基础练习和基本数学能力的练习, 为进一步学习数学打好良好的基础.

四、选择性

由于每个学生对数学学习的要求是不同的, 所以提供差异性和选择性的教材内容也是我们考虑的问题. 对于分数化循环小数, 循环小数化分数问题, 对不同的学生可以有不同的要求, 教材做了较为全面的介绍, 教师和学生都可作相应的选择. 而对于那些有兴趣进一步学习的学生, 每一章后我们都设计了阅读材料、探索活动等, 教师和学生都可根据实际情形进行选择使用.

五、技术性

根据新课程标准, 小学允许学生使用计算器, 所以在本教材中, 允许学生使用计算器, 并设计了利用计算器去验证分数有关的运算律. 不仅仅是将计算器作为数值计算的工具, 而且希望通过计算器(技术)去促进学生对数学的理解, 用计算器参与数学的探索活动.

以上只是这本教材的某些特点, 肯定有许多不足的地方, 希望专家和教师提出宝贵意见.

符号化的概念	图象语言	说明(自然语言)
基本不等式 a、$b \in \mathbf{R}^+$, $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.	P, A, a, H, b, B	PH垂直直径AB, $\lvert PH\rvert \leqslant$半径$r$, $\lvert PH\rvert = \sqrt{ab}$, 半径$r = \frac{a+b}{2}$, 因此$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.
等差数列通项公式 $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d = (a_1-d) + n\cdot d$.	a_n, a_3, a_2, a_1, a_1-d, 1, 2, 3, n	等差数列的所有项均在一次函数$y=kx+b$的图象上, 其中$k=d$, $b=a_1-d$. $d>0$时为递增数列, $d<0$时为递减数列.
二项式系数的性质: $C_n^k = C_n^{n-k}$. 当n为偶数时$(C_n^k)_{\max} = C_n^{\frac{n}{2}}$; 当$n$为奇数时$(C_n^k)_{\max} = C_n^{\frac{n-1}{2}} = C_n^{\frac{n+1}{2}}$.	$C_n^{\frac{n}{2}}$, $C_n^{\frac{n}{2}-1}$, $C_n^{\frac{n}{2}-1}$, C_n^2, C_n^{n-2}, C_n^1, C_n^{n-1}, C_n^0, C_n^n	(1)先增后减, 中间最大. (2)当n为偶数时, 中间一项$C_n^{\frac{n}{2}}$取得最大值; 当n为奇数时, 中间的两项$C_n^{\frac{n-1}{2}}$、$C_n^{\frac{n+1}{2}}$相等, 且同时取得最大值.

实际上, 这样的例子是很多的, 又比如, 用文氏图来体现集合的运算, 用图象来蕴涵函数的性质, 用复平面上的点来表示复数等等, 都充分体现了用图象语言来表达概念的精妙之处, 而图象语言的直观性更容易激发人的想象和思考, 为用形数结合的思想方法解决问题打下基础.

二、数学语言形态的互译是正确理解题意、有效进行思维的基础

"精炼"是数学语言的特点, 然而, 许多学生正是由于对题目关键字或句不理解(或理解有误)使解题失败, 有的学生面对困难, 思维发生停顿, 浑身使不上劲, 问题的症结就在于不能正确地实现三种数学语言形态之间的转换. 注意各种语言形态的互译训练是促使学生迅速进入解题情景, 有效进行思维并顺利解决问题的重要途径.

例1 (2004年上海高考题) 已知$A(1,-2)$, 若向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{a}=\{2,3\}$同向, $|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{13}$, 则点$B$的坐标为______.

[分析] 本题的关键句是"向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{a}=\{2,3\}$同向", 转换成符号语言是"$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{a}$ $(k\in\mathbf{R},\ k>0)$"; 若转换成图象语言, 即为在直角平面上, 向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{a}=\{2,3\}$表示的有向线段平行且同向, 由此产生了不同的思维途径.

解法一: ∵ $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{a}$ $(k\in\mathbf{R},\ k>0)$, 设$\overrightarrow{AB}=\{2k,3k\}$, $4k^2+9k^2=52$, 则$k=2$.

∴ $\overrightarrow{AB}=\{4,6\}$, 则点$B$的坐标为$B(5,4)$.

解法二: 如图1, 设线段AB中点C, 由于$|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{13}=2|\overrightarrow{a}|$,

∴ $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{a}=\{2,3\}$, 又$A(1,-2)$,

∴ 点C的坐标为$(3,1)$,

故点B的坐标为$B(5,4)$.

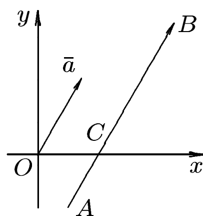


图1

例2 若x、$y\in\mathbf{R}^+$, $x+y=1$, 求证: $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\geqslant\frac{25}{4}$.

[分析] 由条件等式$x+y=1$, 可作三角代换(符号语言的转换):

$x=\cos^2\theta$, $y=\sin^2\theta$, 可以使代数不等式转化为三角不等式, 然后应用三角函数的有界性, 通过"放缩"法, 可使问题得到解决. 但若把符号语言$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\geqslant\frac{25}{4}$理解成"代数式$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)$的最小值为$\frac{25}{4}$". 则可启发我们用求函数最值的方法来证明上述不等式.

证明: $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)=xy+\frac{2}{xy}-2$, 令$t=xy$, $t\in\left(0,\frac{1}{4}\right]$, 因为函数$f(t)=t+\frac{2}{t}-2$在$t\in\left(0,\frac{1}{4}\right]$上为单调递减函数, 则$t=\frac{1}{4}$时, $f(t)$有最小值$\frac{25}{4}$, 由此可知$x=y=\frac{1}{2}$时, 代数式$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)$的最小值为$\frac{25}{4}$,

即不等式$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(y+\dfrac{1}{y}\right)\geqslant\dfrac{25}{4}$成立.

本题两次运用了变量的代换法, 而变量代换本身就是数学语言的一种转换, 这充分体现了数学符号语言的丰富性. 因此数学语言形态的转换不仅是正确理解题意的基础, 也是丰富解题手段、培养思维灵活性的需要.

三、形数结合解决问题是培养左右脑协调思维的重要途径

数学家华罗庚曾说过"数缺形时少直觉, 形少数时难入微", 它是我们前进道路上的一盏明灯, 引导我们形数结合寻找更佳、更快捷的解决问题的方法, 同时也培养学生跳跃式的思维并经历"顿悟"的境界.

例3 求函数$y=\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$的值域.

[分析] 本题解法很多, 可以利用不等式的性质, 原式可化为$y=\dfrac{2}{1+e^x}-1$; 也可以利用代换法, 设$e^x=t^2$, 则$y=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}=\cos\theta$; 设$e^x=\operatorname{tg}\theta$, $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 则$y=\dfrac{1-\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}\theta}=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)$; 但若设$e^x=\lambda>0$, 则$y=\dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}$, 联系定比分点公式, 则可以从形的角度来思考了.

解: 设$e^x=\lambda$, $\lambda\in(0,\infty)$, $y=\dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}=\dfrac{1+\lambda\cdot(-1)}{1+\lambda}$, $P_1(1,1)$, $P_2(0,-1)$, 则y表示线段P_1P_2上一个内分点P的纵坐标, 则$y\in(-1,1)$.

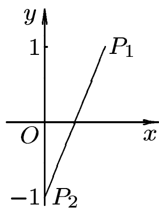


图 2

例4 已知x_1是方程$x+\lg x=3$的根, x_2是方程$x+10^x=3$的根, 则x_1+x_2等于 ( )

(A) 6; (B) 3; (C) 2; (D) 1.

[分析]: 两个方程都是超越方程, 联想到课本中对此类问题有图象法求交点个数或近似根等. 把方程$x+\lg x=3$转化为$\lg x=3-x$, 则x_1是函数$y_1=\lg x$与$y_2=3-x$交点A的横坐标, x_2是函数$y_3=10^x$与$y_2=3-x$交点B的横坐标(如图3), 由于$y_1=\lg x$与$y_3=10^x$是互为反函数, 图象关于$y=x$对称, 设$y_2=3-x$与$y=x$交点为C, 则A、B两点关于点C对称, 设x_0为点C的横坐标, $\therefore x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$, 即$x_1+x_2=2x_0$.

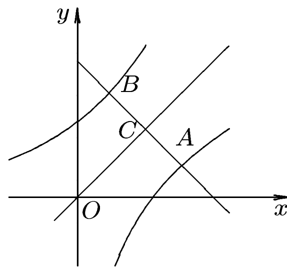


图 3

解: 解方程组$\begin{cases}y=x,\\ y=3-x,\end{cases}$ 得$x_0=\dfrac{3}{2}$,

$\therefore x_1+x_2=3$.

解决本题的关键是把题目的自然语言、符号语言转化为图象语言. 这需要很好地理解函数与方程、互为反函数图象的对称关系、方程的根与两图象交点的坐标之间的关系, 通过三种语言之间的互译来揭示知识之间的内在联系, 从而找到解决问题的途径.

例5 (2004年全国高考题) 椭圆$\dfrac{x^2}{m+1}+y^2=1$的两个焦点是$F_1(-c,0)$与$F_2(c,0)$ $(c>0)$, 且椭圆上存在点P, 使得直线PF_1与直线PF_2垂直.

(1) 求实数m的取值范围;

(2) 设L是相应于焦点F_2的准线, 直线PF_2与L相交于点Q, 若$\dfrac{|QF_2|}{|PF_2|}=2-\sqrt{3}$, 求直线$PF_2$的方程.

解: (1) 设$P(x,y)$, $PF_1\perp PF_2$,

$\therefore \dfrac{y}{x-c}\cdot\dfrac{y}{x+c}=-1$, 即$x^2+y^2=c^2\ (x\neq\pm c)$.

点P在以原点为圆心、c为半径的圆上.

因此只需$c^2=m\geqslant b^2=1$,

教材使用中的前呼后应和查漏补缺

741020 甘肃省天水铁一中 吴俊杰

学生学、教师教, 最重要的依据就是教材, 但在使用教材的过程中发现, 教材总有这样那样的一些并不令人满意之处. 因此教师有必要也应该创造性地使用教材. 本文结合教学实践谈两点做法.

一、向字(词)典学习, 使教材前呼后应

信手翻开商务印书馆出版的1980年8月第1版的新华词典, 常会见到前呼后应的例子. 如在P.179字条“佃diàn”后有这样的文字“tián (832页)”, 意思是说“佃”这个字有两个读音, 一个是“diàn”在本页, 另一个读音是“tián”, 在832页可以找到; 又如词条“附庸国”是这样解

实数m的取值范围是$m \geqslant 1$.

(2) 由图4显然可得:

$\triangle MQF_2 \backsim \triangle PF_1F_2$,

$\dfrac{|QF_2|}{|F_1F_2|} = \dfrac{|F_2M|}{|PF_2|}$,

$$\begin{aligned}\therefore |QF_2|\cdot|PF_2| &= |F_1F_2|\cdot|F_2M| \\ &= 2c\left(\frac{m+1}{c}-c\right) \\ &= 2(m+1)-2c^2 \\ &= 2,\end{aligned}$$

由 $\begin{cases}\dfrac{|QF_2|}{|PF_2|} = 2-\sqrt{3}, \\ |QF_2|\cdot|PF_2| = 2,\end{cases}$

得 $\begin{cases}|PF_2| = \sqrt{3}+1, \\ |QF_2| = \sqrt{3}-1.\end{cases}$

设$P(x_0, y_0)$, 由 $\begin{cases}x_0^2+y_0^2 = c^2 = m, \\ \dfrac{x_0^2}{m+1}+y_0^2 = 1,\end{cases}$ 得 $y_0^2 = \dfrac{1}{m}$.

过点P作PK垂直于x轴, 则$|PK| = \dfrac{1}{\sqrt{m}}$, 又因为$|F_2M| = \dfrac{b^2}{c} = \dfrac{1}{\sqrt{m}}$, $\therefore |PK| = |F_2M|$, 则$\triangle PF_1K \cong \triangle F_2QM$, $\therefore |F_2Q| = |PF_1| = \sqrt{3}-1 < |PF_2|$, 因此点$P$在$y$轴左侧且$2\sqrt{m+1} = 2\sqrt{3}$, 则$m = 2$, $\therefore y_0 = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $x_0 = -\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, $P_0\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2}, \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $F_2(\sqrt{2}, 0)$, 则PF_2的方程为$y = \pm(\sqrt{3}-2)(x-\sqrt{2})$.

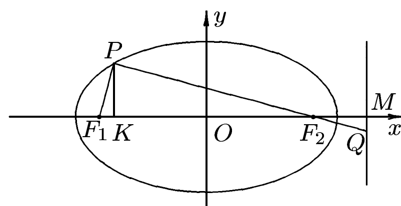


图 4

[说明] 本题解法充分体现了左右脑协调思维的独特之处, 很好地挖掘了题目中的几何元素, 把图象语言的功能发挥到极致, 第(1)题运用了圆和椭圆相交的充要条件: $c \geqslant b$, 第(2)题正是发现了两个三角形之间的“形似”, 挖掘出两对三角形的相似与全等, 利用相似与全等避免了点P位置的讨论, 并计算出了m的值.

平时教学中多培养学生数学语言转换能力, 对提高学生的素质以及学生左右脑协调思维的能力都大有好处, 也是培养学生创造性思维的重要途径.

参考文献

1. 钟善基主编.《中国著名特级教师数学思想录——中学数学卷》.江苏教育出版社. 1996年.

2. 陈振宣. 《培养数学思维能力的探索》. 上海教育出版社. 1998年.

释的: “受宗主国统治和奴役的国家, 参见[宗主国]1125页”. 类似的例子还很多, 这样表示的好处不用多说. 那么, 数学教材是否也可以做这样的处理呢? 答案是肯定的, 学情调查表明有87%的学生赞同这种做法. 因为这样做可以使教材前后呼应, 对学生复习、预习都十分有利.

如: 人教版《代数》第二册P.120在引入《数的开方》一章时给出了三个例子, 其中一个是“已知容积为0.125立方米的正方体木箱, 它的棱长应是多少?” 这个例子在教材P.134给出了解答. 教学时我指导学生在P.120引例的后面添上这样的一段文字: “详细解答参见P.134”.

又如: 人教版《几何》第二册教材P.42例3:“如图1, $AB=CD$, $BC=DA$, E、F是AC上两点, 且$AE=CF$, 求证: $BF=DE$”. 教材采用全等三角形的有关知识给出了证明. 研读教材时我发现, 在学习完平行四边形的判定方法之后, 此题完全可以有更简单的证明. 教材P.137的例1其实质就是P.42例3, 但叙述不同.

教材编写时若能在P.137采用与P.42相同的叙述, 并在P.42证毕后加上这样的一段文字“更简单的证法详见P.137例1”, 在P.137例1后添上这样的一段文字“此题还可用全等三角形的有关知识证明, 详见P.42”, 效果会很好.

倘若不改变P.137例1的叙述, 则可以在此题后添加这样的叙述“此例与P.42的例3属同一问题的两种不同的表述、解答”.

在P.137例1的教学中, 我引导学生阅读了P.42例3, 了解了两题在叙述上的差别, 通过两种解题方法的对比, 学生加深了对此题的理解, 加强了一题多解的训练, 又在一定程度上增强了学生分析问题、选择最简解题思路的能力.

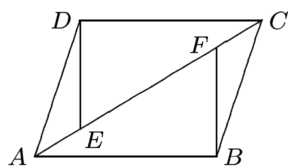


图1

二、查漏补缺, 尽可能地不要回避问题

也许是出于所涉及知识范围超纲与控制教材难度的目的, 教材中常会有意地回避一些问题, 但我认为这种做法与素质教育是背道而驰的, 不足取. 教师备教材时有必要根据学生的学习情况选择适当的方式补上这些内容. 教学实践表明, 只要方法得当, 不但不会增加学生的学习负担, 反而能加深理解, 促进思维发展.

如初中代数教材第二册在讲实数时, 有这样一句话:“我们已经知道, 有理数包括整数和分数, 任何一个有理数都可以写作有限小数或者循环小数, ⋯⋯ 反过来, 有限小数和循环小数也可以表示成有理数”. 可实际情况却是, 学生知道的仅仅是“有限小数化为分数” 与“分数化成小数”的办法, 但循环小数如何表示成有理数(分数) 却不知道, 这之前之后的教材中均没有涉及. 多年的教学实践中, 常有学生提出疑问:“循环小数如何化成分数呢?”教学参考用书在谈到这一问题时, 给出了这样的说明:“这一问题的解答需要用到数列及极限的有关知识”, 也正是出于这个原因, 教材回避了这一问题, 也没有给出回避的理由. 但这样不作任何解释的回避的做法是不妥的, 对学生的负面影响较大. 事实上, 对此问题可以给出下面的两种处理办法:

(1) 用比教材正文小一号的另一种字体给出比较通俗的运用极限、数列的有关知识的解答. 如果实在不行也可以添加这样的一段文字: “这个问题的解答需要用到高二数列、极限的有关知识”, 同时, 在高二数学教材的编写中, 在数列极限部分内容后给出“循环小数化成分数”类例题、解答.

(2) 寻找学生比较容易接受的这个问题的其他解答, 如下面的一种. 这里虽然也用到了极限的思想, 只是在教学中没有提及极限的术语, 但事实上, 初中数学有部分章节也在有意识地渗透着极限的思想. 教学中发现学生对这种解法接受情况很好.

(下转第1–20页)

对一道立体几何习题的探讨与推广

454550 河南省焦作师范高等专科学校 葛 炜

一、习题与答案

某学习参考资料中有如下一题:

过空间任意一点O作与两条异面直线都成60°角的直线, 可能作的条数是 ···············(　)

(A) 4;　　(B) 3;

(C) 2;　　(D) 4或3或2.

答案: 设α为两条异面直线所成的角, 分类讨论:

(1) 当$\alpha < 60^\circ$时, 这时可作2条;

(2) 当$\alpha = 60^\circ$时, 这时可作3条;

(3) 当$\alpha > 60^\circ$时, 这时可作4条.

二、此题涉及以下三个知识点

1. "异面直线a、b所成的角".

设两异面直线分别为a、b, 如图1, 过空间任一点O作直线$AC /\!/ a$, $BD /\!/ b$, 直线AC、BD所成的锐角(或直角)就是异面直线a、b所成的角.

设$\angle AOB$为异面直线a、b所成的角, 根据异面直线所成角的定义得知, $0^\circ < \angle AOB \leqslant 90^\circ$, $90^\circ \leqslant \angle AOD < 180^\circ$.

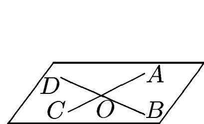


图 1

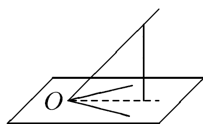


图 2

2. "经过一个角的顶点引这个角所在平面的斜线, 若它和已知角两边的夹角为锐角且相等, 则这条斜射线在平面内的射影是这个角的平分线." 如图2. 由此可推得, 与两条异面直线成相等角的直线OP在如图3、4的两平面γ和μ内.

图3中平面γ和π的交线是$\angle AOB$的角平分线, 平面$\gamma \perp \pi$. 图4中平面μ和π的交线是$\angle AOD$的角平分线, 平面$\mu \perp \pi$.

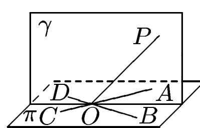


图 3

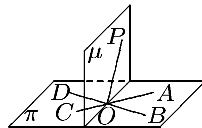


图 4

3. "平面的斜线和它在平面内的射影所成的角, 是这条斜线和这个平面内任一条直线所成的角中最小的角, $\cos\theta = \cos\theta_1\cos\theta_2$, $\theta > \theta_1$, $\theta \geqslant \theta_2$". 由此推得, 在图3中$\angle POA \geqslant \frac{1}{2}\angle AOB$, 在图4中$\angle POA \geqslant \frac{1}{2}\angle AOD$, 这是解题的关键.

三、结论

设两条异面直线所成的角为α, 过O的直线与两条异面直线所成的等角为β (为了论述简明, 在下面的论述中, 把"过O可作几条直线与两条异面直线成等角β" 简写为"可作几条", α、β在下面的应用中不再设置, 其含义保持一致).

1. 在平面γ内(图3),

当$\beta > \frac{1}{2}\alpha$时, 可作2条;

当$\beta = \frac{1}{2}\alpha$时, 可作1条, 即$\angle AOB$的角平分线;

当$\beta < \frac{1}{2}\alpha$时, 可作0条.

2. 在平面μ内(图4),

当$\beta > \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha)$, 即$\alpha > 180^\circ - 2\beta$时, 可作2条;

当$\beta = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha)$, 即$\alpha = 180^\circ - 2\beta$时, 可作1条;

当$\beta < \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha)$, 即$\alpha < 180^\circ - 2\beta$时, 可作0条.

一个平面几何题数据的探究

318000 浙江省台州中学 张哲才 张哲贵

面积法在用于解平面几何问题时, 有许多独到之处, 然而稍不留意, 还是会生出许多"是非"的, 请看下例:

例1 如图1, $\triangle ABC$中, 点D、E、F分别在边AB、BC、AC上, 且AE、CD、BF都经过点O, 若$\triangle OAF$、$\triangle OCF$、$\triangle OBD$、$\triangle OCE$的面积分别是10、20、30、40, 设$\triangle OAD$的面积为x, $\triangle OBE$的面积为y, 则$x =$ ______, $y =$ ______.

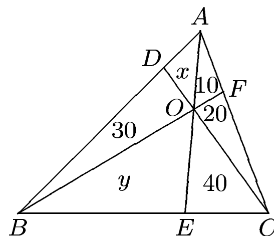


图1

显然, 要用面积法来求解, 我们试着来解一下:

四、下面根据结论对β取不同的值进行分类讨论

1. $\beta = 60^\circ$.

分析: 因$60^\circ > \dfrac{1}{2}\alpha$恒成立, 不论$\alpha$角怎样变化, 在平面$\gamma$内始终可作2条.

所以只根据结论2进行讨论, 在平面μ内,

当$60^\circ > \dfrac{1}{2}(180^\circ - \alpha)$, 即$\alpha > 60^\circ$时, 可作2条;

当$\alpha = 60^\circ$时, 可作1条, 即$\angle AOD$的角平分线;

当$\alpha < 60^\circ$时, 可作0条.

因此就有文章开头给出的答案.

2. $\beta = 80^\circ$.

当$\alpha > 180^\circ - 2\times 80^\circ = 20^\circ$时, 可作4条;

当$\alpha = 20^\circ$时, 可作3条;

当$\alpha < 20^\circ$时, 可作2条.

3. $\beta = 45^\circ$.

当$\alpha = 90^\circ$时, 可作2条, 即2条角平分线;

当$\alpha < 90^\circ$时, 可作2条, 即γ内2条. 因为$\dfrac{1}{2}\angle AOD > 45^\circ$, 所以在$\mu$内可作0条.

4. $\beta = 20^\circ$.

分析: 当$\beta = \dfrac{1}{2}\alpha$, 即$\alpha = 2\beta = 40^\circ$时, 在$\gamma$内可作1条, 即$\angle AOB$的角平分线, 这时$\angle AOD = 140^\circ$, 在$\mu$内可作0条;

当$\alpha > 40^\circ$时, 在γ内可作0条, 因$\angle AOD < 140^\circ$, 所以在μ内可作0条.

因此, 当$\alpha < 40^\circ$时, 可作2条;

当$\alpha = 40^\circ$时, 可作1条;

当$\alpha > 40^\circ$时, 可作0条.

五、根据上面的探讨, 可归纳出如下规律

1. $\beta > 45^\circ$, 当$\alpha > 180^\circ - 2\beta$时, 可作4条;

当$\alpha = 180^\circ - 2\beta$时, 可作3条;

当$\alpha < 180^\circ - 2\beta$时, 可作2条.

2. $\beta = 45^\circ$, 当$\alpha = 90^\circ$时, 可作2条;

当$\alpha < 90^\circ$时, 可作2条.

3. $\beta < 45^\circ$, 当$\alpha > 2\beta$时, 可作0条;

当$\alpha = 2\beta$时, 可作1条;

当$\alpha < 2\beta$时, 可作2条.

六、评注

此题思考过程中既注意探究和分类讨论的全面性, 又注意其合理性. 题出得不偏不怪, 注重考查学生的双基, 考查学生的思维能力和探究能力, 学生稍微不慎, 考虑不周, 就很难找到完整的答案, 实为一道难得的好题.

① 以AC、BC边为基准, 有

$$\frac{S_{\triangle AOF}}{S_{\triangle COF}}=\frac{AF}{CF}=\frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle CBF}},$$
$$\frac{S_{\triangle BOE}}{S_{\triangle COE}}=\frac{BE}{EC}=\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle ACE}},$$

即$\begin{cases}\dfrac{10}{20}=\dfrac{30+x+10}{y+40+20},\\ \dfrac{y}{40}=\dfrac{x+30+y}{10+20+40},\end{cases}$

可解得$\begin{cases}x=30,\\ y=80.\end{cases}$

② 以AC、AB边为基准, 有

$$\frac{S_{\triangle AOF}}{S_{\triangle COF}}=\frac{AF}{CF}=\frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle CBF}},$$
$$\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle BOD}}=\frac{AD}{BD}=\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle BCD}},$$

即$\begin{cases}\dfrac{10}{20}=\dfrac{30+x+10}{y+40+20},\\ \dfrac{x}{30}=\dfrac{x+10+20}{30+y+40},\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=15\sqrt{3}-15,\\ y=30\sqrt{3}-10,\end{cases}$ (负值舍去).

③ 以AB、BC边为基准, 有

$$\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle BOD}}=\frac{AD}{DB}=\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle BCD}},$$
$$\frac{S_{\triangle BOE}}{S_{\triangle COE}}=\frac{BE}{CE}=\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle ACE}},$$

即$\begin{cases}\dfrac{x}{30}=\dfrac{x+10+20}{30+y+40},\\ \dfrac{y}{40}=\dfrac{x+30+y}{10+20+40},\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=15\sqrt{7}-30,\\ y=20\sqrt{7},\end{cases}$ (负值舍去).

出现三组各不相同的答案! 是一题多解? 还是计算过程错了, 经多次、多人检验, 计算过程绝对正确. 是面积法应用时有什么附加条件吗? 为此, 我们又做了另一道题, 请看例2:

例2 如图2, 从$\triangle ABC$三顶点出发的三条直线在三角形内交于一点O, 将三角形分成六个小三角形, 其中四个小三角形的面积如图2所示, 求图中表示$\triangle AOE$、$\triangle BOF$面积的x、y的值.

我们也用例1的方法来解.

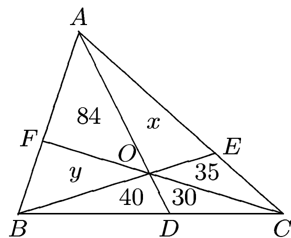


图 2

① 以BC、AC边为基准, 列方程组得:

$\begin{cases}\dfrac{84+y+40}{x+35+30}=\dfrac{40}{30},\\ \dfrac{y+84+x}{40+30+35}=\dfrac{x}{35},\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=70,\\ y=56,\end{cases}$ (负值舍去).

② 以BC、AB边为基准, 列方程组得:

$\begin{cases}\dfrac{84+y+40}{x+35+30}=\dfrac{40}{30},\\ \dfrac{35+x+84}{30+40+y}=\dfrac{84}{y},\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=70,\\ y=56,\end{cases}$ (负值舍去).

③ 以AC、AB边为基准, 列方程组得:

$\begin{cases}\dfrac{y+84+x}{40+30+35}=\dfrac{x}{35},\\ \dfrac{35+x+84}{30+40+y}=\dfrac{84}{y},\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=70,\\ y=56,\end{cases}$ (负值舍去).

结论是如此的一致! 说明面积法解题确实是美妙的.

现在我们有理由来重审一下, 例1的题目本身是否正确?

对于例1, 用解法①, 以AC、BC边为基准, 解得$\begin{cases}x=30,\\ y=80.\end{cases}$

如果以另一边AB为基准进行检验, 不难发现$\dfrac{30+10+20}{30+80+40}\neq\dfrac{30}{30}$, 故题目本身有误.

用解法②, 以AC、AB边为基准, 解得$\begin{cases}x=15\sqrt{3}-15,\\ y=30\sqrt{3}-10.\end{cases}$

如果以另一边BC为基准进行检验, 不难

折纸条画五角星

246600 安徽省岳西县城关中学 李庆社

五角星是非常美丽的图形. 在庄严的国徽上, 在五星红旗上、在战士的帽徽上都有五角星, 有的灯笼也做成五角星形状. 五角星端正、美丽, 可是要画得准确, 也不是一件容易的事.

画五角星的方法很多. 比如, 用量角器把圆心角五等分 (即每个圆心角为72°), 我们还可以用直尺和圆规把圆周五等分, 有的同学可能还会使用剪刀剪出一个五角星.

下面介绍一个用折纸条的方法做一个正五边形, 然后再画出一个五角星的方法. 这种方法既简便, 又准确, 很有趣.

先裁一张宽窄相同的纸条, 把它打一个结 (图1), 然后拉紧、压平. 再把两边画阴影的部分剪掉, 便得到了一个正五边形 $ABCDE$ (图2).

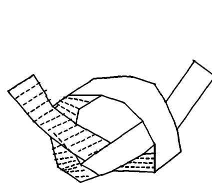


图 1

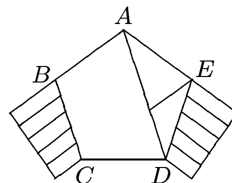


图 2

要证五边形 $ABCDE$ 是正五边形, 需要证明:

(1) 五条边都相等;

(2) 五个角都相等.

发现 $\dfrac{15\sqrt{3}-15+30+30\sqrt{3}-10}{10+20+40} \neq \dfrac{30\sqrt{3}-10}{40}$, 同样可知题目本身有误.

用解法③, 以 AB、BC 边为基准, 解得 $\begin{cases} x = 15\sqrt{7}-30, \\ y = 20\sqrt{7}. \end{cases}$

如果以另一边 AC 为基准进行检验, 不难发现 $\dfrac{30+15\sqrt{7}-30+10}{20\sqrt{7}+40+20} \neq \dfrac{10}{20}$, 同样可知题目本身有误.

而对于例2, 用解法①, 以 BC、AC 边为基准, 解得 $\begin{cases} x = 70, \\ y = 56. \end{cases}$

如果以另一边 AB 为基准进行检验, 不难发现 $\dfrac{35+70+84}{30+40+56} = \dfrac{84}{56}$, 故题目本身无误.

用解法②, 以 BC、AB 边为基准, 解得 $\begin{cases} x = 70, \\ y = 56. \end{cases}$

如果以另一边 AC 为基准进行检验, 不难发现 $\dfrac{56+84+70}{40+30+35} = \dfrac{70}{35}$, 同样可知题目本身无误.

用解法③, 以 AC、AB 边为基准, 解得 $\begin{cases} x = 70, \\ y = 56. \end{cases}$

如果以另一边 BC 为基准进行检验, 不难发现 $\dfrac{84+56+40}{70+35+30} = \dfrac{40}{30}$, 同样可知题目本身无误.

现在我们可以知道: 解例1、例2类题, 不论选用哪两条边作基准, 解得 x、y 的值, 均可以以另一条边为基准进行检验, 从而得出题目本身的真伪性.

接下来, 我们能不能再引申一步呢:

① 怎样修改条件, 才能使例1的题目是正确的呢?

② 根据前面的解题过程可知, 利用面积法可以列出三个独立的方程, 那么是否表示这样的三角形中如果有三小块未知的面积, 也是可以求解的呢?

以下证明五条边都相等.

先证$AB = BC$.

作$AF \perp BC$直线, 垂足为F; 作$CG \perp AB$直线, 垂足为G(图3). 由于AF、CG都等于纸条的宽, 因此$AF = CG$.

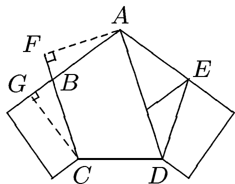


图 3

又$\angle AFB = \angle CGB = 90°$,

$\angle ABF = \angle CBG$,

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle CBG$.

$\therefore AB=BC$.

同理可证$AB = AE$, $AE = ED$.

这样便证出了$AB = BC = DE = EA$. 只要再证出$AB = CD$, 问题便解决了.

$\because BC /\!/ AD$, $\therefore$ 四边形$ABCD$是梯形.

连结AC、BD(图4), 则$\triangle ABD$与$\triangle ACD$等积.

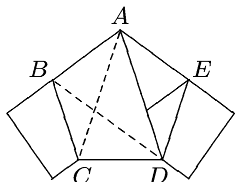


图 4

若把BD看作是$\triangle ABD$的底, 那么它的高等于纸条的宽h; 若把AC也看作是$\triangle ACD$的底, 那么它的高也等于h.

由三角形的面积公式, 得

$\frac{1}{2}AC \cdot h = \frac{1}{2}BD \cdot h$, $AC = BD$.

$\therefore$ 四边形$ABCD$是等腰梯形.

$\therefore AB = CD$.

$\therefore AB = BC = CD = DE = EA$.

因此五边形$ABCDE$的五条边都相等.

下面证明它的五个角都相等.

四边形$ABCD$是等腰梯形(图5).

$\therefore \angle ABC = \angle BCD$.

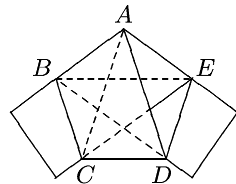


图 5

同理, 四边形$ABCE$、$ABDE$也是等腰梯形.

$\therefore \angle ABC = \angle BAE$, $\angle BAE = \angle AED$.

$\therefore \angle BCD=\angle ABC=\angle BAE=\angle AED$.

下面只要再证明$\angle BCD = \angle CDE$就可以了.

$\because$ 四边形$ABCD$、$ABCE$、$ABDE$、$ACDE$是等腰梯形.

$\therefore BD = AC$, $AC = BE$, $BE = AD$, $AD = CE$. $\therefore BD = CE$.

在$\triangle BCD$和$\triangle EDC$中,

$\because BD = CE$, $CD = CD$, $BC = DE$,

$\therefore \triangle BCD \cong \triangle EDC$,

$\therefore \angle BCD = \angle EDC$.

因此, $\angle BCD = \angle ABC = \angle BAE = \angle AED = \angle EDC$.

所以五边形$ABCDE$是正五边形.

如果纸条的宽为h, 正五边形的边长为a, 那么它们之间有如下的关系:

$h = a\sin 72° \approx 0.9511a$.

(上接第1–15页)

例1 将$0.\dot{2}\dot{3}$化为分数.

解: 设$0.\dot{2}\dot{3}= a$,则

$a = 0.\dot{2}\dot{3} = 0.232323\cdots$

$= 0.23 + 0.00232323\cdots$

$= 0.23 + 0.232323\cdots \times \frac{1}{100}$

$= 0.23 + 0.\dot{2}\dot{3} \times \frac{1}{100}$

$= 0.23 + a \times \frac{1}{100}$,

$\therefore a = \frac{23}{99}$, $\therefore 0.\dot{2}\dot{3} = \frac{23}{99}$.

解概率应用题时出错的几种原因

226661 江苏省海安县曲塘中学 夏志勇

概率知识与现实生活息息相关, 因此概率应用题越来越受到命题者的青睐, 如何提高解概率应用题的正确率呢? 研究出错的原因非常重要. 以下是笔者总结的解概率应用题时出错的五点原因.

原因一: 概念不清

概率部分有不少公式, 但每个公式的成立都有一定的前提, 如只有当事件A、B互斥时方有$P(A+B)=P(A)+P(B)$, 只有当事件A、B互相独立时才有$P(AB)=P(A)P(B)$, 因此解题时要对照定义弄清楚题中各个事件之间的关系, 明确概念, 正确选用公式, 不能张冠李戴.

例1 从装有4粒形状、大小相同, 颜色不同的玻璃球的瓶中随意一次倒出若干粒玻璃球(至少倒一粒), 则倒出奇数粒玻璃球的概率为__________.

读完题目后, 不少同学们认为: 每一粒玻璃球是否倒出是相互独立的, 因此这是一个独立重复实验, 并给出如下解答: 每一粒玻璃球被倒出与没被倒出是等可能的, 各占$\frac{1}{2}$, 故倒出奇数粒的概率为

$$P_{奇}=C_4^1\left(\frac{1}{2}\right)^4+C_4^3\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{2}.$$

其对错暂且不论, 我们可以先如法"炮制"再算出倒出偶数粒的概率.

$$P_{偶}=C_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^4+C_4^4\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{7}{16}.$$

$$P_{奇}+P_{偶}=\frac{1}{2}+\frac{7}{16}=\frac{15}{16}\neq 1,$$

显而易见, 上述解法不正确, 问题出在什么地方呢? 仔细地再读一遍题目, 可以发现由于至少要倒出一粒玻璃球, 故前三个球都没被倒出时, 第四个玻璃球必须被倒出, 所以这并不是一个独立重复实验, 正确的解答应为:

$$P_{奇}=\frac{C_4^1+C_4^3}{C_4^1+C_4^2+C_4^3+C_4^4}=\frac{8}{15}.$$

原因二: 处理不好与排列组合的关系

处理概率问题时, 是否要进行排列、组合方面的思考, 不少同学往往难以抉择, 结果只能随心所欲,导致解题出错.

例2 省工商局于2003年3月份, 对全省流通领域的饮料进行了质量监督抽查, 结果显示, 某种刚进入市场的s饮料的合格率为80%. 现有甲、乙、丙3人聚会, 选用6瓶s饮料, 并限定每人喝2瓶. 求:

(1) 甲喝2瓶合格的s饮料的概率;

(2) 甲、乙、丙3人中只有1人喝到不合格的s饮料的概率(精确到0.01).

很多同学看完题目后一筹莫展, 感觉"无从下手", 因为他们都沉陷在这样的困惑中: 饮料的合格率为80%, 6瓶s饮料中有4.8瓶($6\times 80\%=4.8$)是合格的, 4.8瓶是算5瓶还是算4瓶呢? 甲喝的两瓶合格的s饮料从哪儿选呢?

合格饮料有几瓶? 甲喝的两瓶饮料要不要选呢? 我们一起来研究一下题目的条件, 注意"s饮料的合格率为80%" 是指每瓶饮料合格的概率是80%, 这与选用多少瓶饮料无关, 所以由题意, 题中给出的6瓶s饮料中, 合格的瓶数是不定的, 0、1、2、……、6皆有可能, 每瓶饮料都有"合格"与"不合格"两种可能, 也就是说6瓶饮料并无"差异", 可以看成是6个相同的元素, 每个人喝的两瓶饮料就看成是已经分配好了, 可以不选. 略解如下:

(1) 记$A_1=$"甲喝的第一瓶饮料合格",

$P(A_1)=0.8$,

$A_2=$"甲喝的第二瓶饮料合格",

$P(A_2)=0.8$,

$A=$"甲喝的两瓶饮料均合格",

A_1、A_2互相独立, $P(A)=P(A_1)P(A_2)=0.64$.

(2) 由 (1) 记$\overline{A}$ ="甲喝到不合格s饮料", $P(\overline{A})=1-0.64=0.36$.

"甲、乙、丙三人每人喝两瓶s饮料"视为三次独立重复试验, 记$B=$"甲、乙、丙三人中只有一人喝到不合格s饮料",

$P(B)=P_3(2)=C_3^2\times 0.64^2\times 0.36\approx 0.44$.

例3 甲、乙两足球队激战90分钟后踢成平局, 加时赛30分钟后仍成平局, 现决定派5名队员, 每人射一点球决定胜负, 设甲、乙两队每个队员的点球命中率均为0.5.

(1) 不考虑乙队, 求甲队仅有3名队员点球命中, 且其中恰有2名队员连续命中的概率;

(2) 求甲乙两队各射完5个点球后, 再次出现平局的概率.

分析: 该例题是一道与排列、组合相结合的概率题.

(1) 中先要考虑甲队5名队员中有3名队员命中, 有且仅有2名队员连续命中的情形共有多少种, 这是一个排列的问题;

(2) 中两队射完5个点球后仍是平局有6种可能 (0:0、1:1、2:2、$\cdots$、5:5), 每一情形中都涉及到组合问题, 比如说3:3时, 5名队员中哪3名队员命中要进行选择, 略解如下:

解: (1) 甲队3名队员射中, 恰有2名队员连续命中的情形有A_3^2种, 故所求的概率为$P_1=A_3^2 0.5^3(1-0.5)^2=\dfrac{3}{16}$;

(2) 再次出现平局包括0:0、1:1、2:2、$\cdots$、5:5共6种可能, 故所求的概率为

$P_2=[C_5^0 0.5^0(1-0.5)^5]^2+[C_5^1 0.5^1(1-0.5)^4]^2+\cdots+[C_5^5 0.5^5(1-0.5)^0]^2=\dfrac{63}{256}$.

原因三: 忽视题中的隐含条件

探索和揭示隐蔽在数学问题中的条件部分, 是完成数学问题解答的关键所在, 忽视了题目中隐含条件的存在, 同学们解题时往往会而不对或对而不全.

例4 有人玩掷硬币走跳跳棋的游戏, 已知硬币出现正反面的概率都是$\dfrac{1}{2}$, 棋盘上标有第0站, 第1站, $\cdots$, 第100站, 一枚棋子开始在第0站, 棋手每掷一次硬币棋子向前跳动一次. 若掷出正面, 棋子向前跳一站 (从k到$k+1$), 若掷出反面, 棋子向前跳二站 (从k到$k+2$), 直到棋子跳到第99站 (胜利大本营), 或跳到第100站 (失败集中营) 时该游戏结束, 设棋子跳到第n站的概率为P_n, 求此人游戏失败的概率.

分析: 游戏失败的概率即P_{100}, 要算P_{100}的值, 应该求出P_n或找出递推关系式.

有同学给出解答为: 易知$P_0=1$, $P_1=\dfrac{1}{2}$, 棋子跳到第二站有两种情况: 从第0站跳两步或从第一站跳一步,所以$P_2=\dfrac{3}{4}$.

记$B=$"棋子跳到第n站",

$B_1=$"棋子先跳到第$n-2$站, 又掷出反面", $P(B_1)=\dfrac{1}{2}P_{n-2}$,

$B_2=$"棋子先跳到第$n-1$站, 又掷出正面", $P(B_2)=\dfrac{1}{2}P_{n-1}$,

$B=B_1+B_2$, $P(B)=P(B_1)+P(B_2)$,

$\therefore\ P_n=\dfrac{1}{2}P_{n-1}+\dfrac{1}{2}P_{n-2}$,

即$P_n-P_{n-1}=-\dfrac{1}{2}(P_{n-1}-P_{n-2})$,

$\therefore\ \{P_n-P_{n-1}\}$是等比数列. ($n\in\mathbf{N}^*$. $n\leqslant 100$), 且首项为$P_1-P_0=-\dfrac{1}{2}$, 公比为$-\dfrac{1}{2}$.

$\because\ P_1-P_0=-\dfrac{1}{2}$,

$\therefore\ P_n-P_{n-1}=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$,

$$\begin{aligned}\therefore\ P_{100}=&(P_{100}-P_{99})+(P_{99}-P_{98})\\&+\cdots+(P_1-P_0)+P_0\\=&\frac{1}{3}\left[2+\left(\frac{1}{2}\right)^{100}\right].\end{aligned}$$

以上解答看似毫无破绽, 然而百密一疏, 题目中的条件"直到棋子跳到第99站 (胜利大本营), 或跳到第100站 (失败集中营) 时该游戏结束"中隐含了这样一个信息: 棋子位于第99站

解析几何中的向量方法

201101 上海市七宝中学 郭 玫

在高中数学体系中, 解析几何占有着很重要的地位, 有些问题用常规方法去解决的话往往运算比较繁杂. 不妨运用向量作形与数的转化, 则会大大简化过程. 所以我们在分别学习好两类知识的同时, 一定要注意它们的相互交叉、渗透. 解析几何其实质体现了使用代数方法研究几何问题, 就思路而言, 几何中的向量方法完全与代数方法一致, 不同的只是用"向量与向量的运算"来代替"数与数的运算". 因而两者结合比较紧密, 通常涉及到夹角、平行、垂直、共线、轨迹等的处理. 以下便是一些实例.

一类问题是, 当题意中条件的陈述是以向量形式给出的几何问题. 其处理方法一般可以有以下两种:

(一) 将向量及其运算的几何意义转化为平

时, 游戏结束, 上述等比数列$\{P_n-P_{n-1}\}$中n的范围为$0\leqslant n\leqslant 99$, $n\in\mathbf{N}$, 所以到第100站只能从第98站向前跳两站, 求P_{100}正确的算法应该是: $P_{100}=\dfrac{1}{2}P_{98}=\dfrac{1}{3}\left[1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{99}\right]$或用$P_{100}=1-P_{99}$ (因为游戏只有两种结果, 非赢即输).

原因四: 考虑不全面

概率问题中的事件有时包含了多方面的多种情形, 不掌握一定的规律, 全盘考虑, 做出的解答自然不正确.

例5 某班有50名学生, 进行一次数学、外语测验, 以此评出学习积极分子. 学习积极分子的条件是他(她)的成绩不亚于班上所有其他学生(如果甲的数学或外语成绩至少有一门比乙高, 则称甲的成绩不亚于乙). 那么该班50名学生中, 学习积极分子最多可能有··········(　)

(A) 1个; (B) 2个; (C) 25个; (D) 50个.

分析: 对于该例大部分同学的答案都是B, 他们认为学习积极分子的数学、外语成绩中至少有一门是全班最高的, 其实这种认识是片面的, 50同学都有可能成为积极分子, 比如50名同学的成绩如下表所示时, 他们都是学习积极分子.

学号	数学成绩	外语成绩
1	100	51
2	99	52
3	98	53
4	97	54
……	……	……
50	51	100

原因五: 脱离实际

概率问题来源于实际, 解决概率问题时应联系实际, 合理作出判断与评估.

例6 某地区的人患某种病的概率是0.25, 且每个人患病与否彼此独立. 今研制一种新的预防药, 任选12人做实验, 结果这12人服用此药后均未患病.问此药是否有效? 为什么? (参考数据$2^{20}=1048576$, $3^{10}=59049$.)

因为12个人不服药均不患病的概率为$(1-0.25)^{12}\approx 3.2\%$, 不为零, 所以很多同学认为这种药不一定有效.

点评: 注意这是一种预防药, 不是治疗的药, 每个人患病与否是无法预知的, 也就是说无法选择12个一定会患病的人检验效果, 因为12个人不服药均不患病的概率只有3.2%, 也就是说不服药12个中有人患病的可能很大, 现由于服药使得12个人均不患病, 因而此药应视为有效.

面图形的位置关系或数量关系, 利用图形的几何性质解题.

(二) 根据题中已给的向量形式, 继续使用向量的性质及运算解题. 究竟使用哪种方法, 应视具体问题解决.

例1　如图1, 已知O为坐标原点, 点F、T、M、N满足$\overrightarrow{OF}=\{1,0\}$, $\overrightarrow{OT}=\{-1,t\}$, $\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{MT}$, $\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{FT}=0$, $\overrightarrow{NT}/\!/\overrightarrow{OF}$.

(1) 当t变化时, 求点N的轨迹方程;

(2) 若S是轨迹上不同于N的另一点, 且存在非零实数λ, 使得$\overrightarrow{FN}=\lambda\cdot\overrightarrow{FS}$, 求证: $\dfrac{1}{|\overrightarrow{FN}|}+\dfrac{1}{|\overrightarrow{FS}|}=1$.

解法1: (1) 由题意可知,

$\overrightarrow{OF}=\{1,0\}\Longrightarrow F(1,0)$,　①

$\overrightarrow{OT}=\{-1,t\}$

$\Longrightarrow T$点在直线$x=-1$上,　②

$\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{MT}\Longrightarrow M$为线段$FT$的中点, ③

$\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{FT}=0\Longrightarrow NM$为$FT$的垂线, ④

$\overrightarrow{NT}/\!/\overrightarrow{OF}\Longrightarrow$直线$NT$平行于$x$轴.　⑤

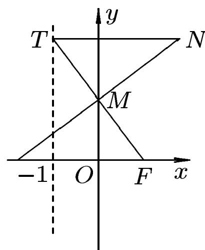


图 1

(至此, 将题中的向量条件全部转化为平面解析几何条件, 以下可用解析几何方法加以解决.)

由条件 ③、④ 可得$|NT|=|NF|$, 由条件 ②、⑤ 可得$|NT|$即为点N到直线$x=-1$的距离. 所以, 由抛物线定义判断轨迹为以$F(1,0)$为焦点, $x=-1$为准线的抛物线, 其方程为$y^2=4x$.

(2) 由$\overrightarrow{FN}=\lambda\overrightarrow{FS}\Longrightarrow F$、$N$、$S$三点共线, 即线段$NS$为过焦点$F$的弦 (由向量共线条件, 转化为三点共线. 以下即利用解析几何方法, 根据抛物线定义, 把到焦点的距离转化为到准线的距离, 利用韦达定理求解, 解略).

解法2: 例1中的(1)也可解为: 设$N(x,y)$, 则由$\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{MT}$可知$M$点是线段$FT$中点, 得$M\left(0,\dfrac{t}{2}\right)$, 所以$\overrightarrow{NM}=\left\{-x,\dfrac{t}{2}-y\right\}$, $\overrightarrow{FT}=\{-2,t\}$, $\overrightarrow{NT}=\{-1-x,t-y\}$.

因为$\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{FT}=0$, 所以$2x+t\left(\dfrac{t}{2}-y\right)=0$. 又因为$\overrightarrow{NT}/\!/\overrightarrow{OF}$, 所以$(-1-x)\cdot 0+(t-y)\cdot 1=0\Longrightarrow t=y$, 所以, N的轨迹方程为$y^2=4x$.

说明: 本例命题以向量形式出现, 解法1把向量形式转化为传统的坐标形式后再解题; 解法2则直接使用向量法解题. 直接利用向量的坐标表示、数量积的坐标运算及向量平行的基本性质列方程求解.

例2　已知两点$M(-1,0)$、$N(1,0)$, 且点P使$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MN}$、$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$、$\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{NP}$成等差数列, 且公差小于零.

(1) 求点P的轨迹C;

(2) 若点$P_0(x_0,y_0)$是曲线C上一定点, 记θ为$\overrightarrow{P_0M}$与$\overrightarrow{P_0N}$的夹角, 求证: $\tan\theta=|y_0|$.

解: (1) 设点$P(x,y)$, 由$M(-1,0)$、$N(1,0)$得$\overrightarrow{PM}=-\overrightarrow{MP}=\{-1-x,-y\}$, $\overrightarrow{PN}=-\overrightarrow{NP}=\{1-x,-y\}$, $\overrightarrow{MN}=-\overrightarrow{NM}=\{2,0\}$, 于是$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MN}$、$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$、$\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{NP}$是公差小于零的等差数列

$$\Longrightarrow\begin{cases}x^2+y^2-1=\dfrac{1}{2}[2(1+x)+2(1-x)]\\ 2(1-x)-2(1+x)<0\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=3,\\ x>0.\end{cases}$$

所以, 点P的轨迹是以原点为圆心, $\sqrt{3}$为半径的右半圆.

(2) 设点$P_0(x_0,y_0)$, 则$\overrightarrow{P_0M}\cdot\overrightarrow{P_0N}=x_0^2+y_0^2-1=2$,

$$\left|\overrightarrow{P_0M}\right|\cdot\left|\overrightarrow{P_0N}\right|$$
$$=\sqrt{(1+x_0)^2+y_0^2}\cdot\sqrt{(1-x_0)^2+y_0^2}$$
$$=\sqrt{(4+2x_0)(4-2x_0)}=2\sqrt{4-x_0^2},$$

故$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{P_0M}\cdot\overrightarrow{P_0N}}{\left|\overrightarrow{P_0M}\right|\cdot\left|\overrightarrow{P_0N}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{4-x_0^2}}$.

又因为$0 < x_0 \leqslant \sqrt{3}$, 因而 $\frac{1}{2} < \cos\theta \leqslant 1 \Longrightarrow 0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{3}$, 又$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{1}{4-x_0^2}}$, 所以,

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{4-x_0^2}}}{\frac{1}{\sqrt{4-x_0}}}$$
$$= \sqrt{3-x_0^2} = |y_0|.$$

说明: 此题较好地把平面向量、解析几何、数列、三角等内容有机地结合起来, 依托向量的基本运算, 避免了一些繁杂的推理论证, 用定量的运算代替了定性的分析, 由于操作程序化, 从而降低了难度.

从以上两例我们可以看到解决上述问题的关键是必须具有对抽象的向量符号的理解能力. 而后或者可以重新回到解析几何一般方法; 或者可以顺水推舟, 通过向量的基本性质, 运用向量的运算求解. 究竟采用何种方法, 不能机械的一概而论, 应视具体问题灵活掌握.

另一类问题是, 原命题中并未涉及到向量, 是完全常规的解析几何问题. 在此本文只举用向量法解, 至于其他各种不同的解答思路和具体解法限于篇幅, 这里从略. 向量法的基本思路是根据题意巧构向量或把题中有关线段看作向量, 利用向量的有关公式列出方程求解. 其思路清晰, 方法简洁规范.

例3　已知椭圆$\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{16}=1$, 直线$l$: $\frac{x}{12}+\frac{y}{8}=1$, P是直线l上一点, 射线OP交椭圆于R, 又点Q在OP上且满足$|OQ|\cdot|OP| = |OR|^2$, 当点P在l上移动时, 求点Q的轨迹方程, 并说明轨迹是什么曲线.

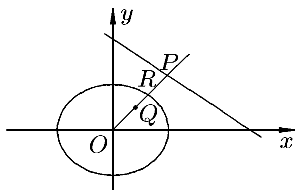


图 2

解: 由题意可设

$$\overrightarrow{OP} = \lambda_1\overrightarrow{OQ}\ (\lambda_1 > 0), \quad ①$$
$$\overrightarrow{OR} = \lambda_2\overrightarrow{OQ}\ (\lambda_2 > 0). \quad ②$$

①、② 代入$|OQ|\cdot|OP| = |OR|^2$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_2^2}. \quad ③$$

设$Q(x,y)$、$P(x_P,y_P)$、$R(x_R,y_R)$, 由 ①、② 可得$\begin{cases} x_P = \lambda_1 x, \\ y_P = \lambda_1 y, \end{cases}$ $\begin{cases} x_R = \lambda_2 x, \\ y_R = \lambda_2 y. \end{cases}$

因为点P、R分别在已知直线和椭圆上, 分别代入得:

$$\frac{x}{12}+\frac{y}{8} = \frac{1}{\lambda_1}, \quad ④$$
$$\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{16} = \frac{1}{\lambda_2^2}. \quad ⑤$$

由 ③、④、⑤ 即得$\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{16} = \frac{x}{12}+\frac{y}{8}$, 因此点$Q$的轨迹是椭圆, 其轨迹方程为

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{5}{2}}+\frac{(y-1)^2}{\frac{5}{3}} = 1$$ (其中x、y不同时为零).

说明: 这是几年前的一道全国高考题, 是一道有难度的多动点轨迹问题. 如果用解析几何常规方法求解, 其过程曲折冗长, 运算复杂. 现在用向量求解, 不仅减少运算量, 其过程也就变得平坦自然. 在解题过程中, 除了合理地构造向量外, 另一关键点就是充分利用了共线向量的性质. 运用这一性质, 还可以解决解析几何中经常遇到的三点共线问题.

例4　如图3, 直线l交抛物线$y = -\frac{1}{2}x^2$于A、B两点, 且$OA \perp OB$, 又点M在y轴上, 且$M(0,-2)$, 求证: 直线AB经过M点.

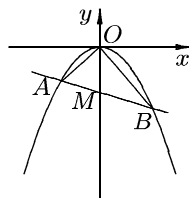


图 3

解: 设$A\left(x_1, -\frac{1}{2}x_1^2\right)$、$B\left(x_2, -\frac{1}{2}x_2^2\right)$,

因为$OA \perp OB \Longrightarrow \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 0 \Longrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = x_1x_2 + \frac{1}{4}(x_1x_2)^2 = 0$.

又$x_1x_2 \neq 0$, 所以$x_1x_2 = -4$.

例说解函数最值题的思维策略

064106 河北省玉田县林南仓中学 李凤权

本文运用一个最值题目的求解过程来探讨解数学题的思维策略.

题目:求函数$y=f(x)=\dfrac{\sqrt{12x-9}}{x}$ $\left(x\in\left[\dfrac{12}{13},4\right]\right)$的最小值.

思路1: 把这个函数转化为有理函数?

由于$x\in\left[\dfrac{12}{13},4\right]$, 所以$y=f(x)>0$, 于是原函数的解析式等价于$y^2=\left(\dfrac{\sqrt{12x-9}}{x}\right)^2$, $x\in\left[\dfrac{12}{13},4\right]$, 即得关于$x$的一元二次方程

$$y^2x^2-12x+9=0, x\in\left[\frac{12}{13},4\right]\cdots\cdots①$$

由于①有实数解的必要(但不充分)条件是$\Delta=(-12)^2-4y^2\cdot 9\geqslant 0$, 所以$y^2\leqslant 4$. 又$y>0$, 可得$y\leqslant 2$, 不难发现, 从这个结论得不到$y$的最小值.

思维受阻, 放弃这个想法(可惜, 看思路3和思路4).

思路2: 有理函数$u=y^2=\dfrac{12x-9}{x^2}$的最小值有其他的求法吗?

由于函数u不是常见函数, 解题者不掌握这类函数的常规解法, 思维再次受阻, 再放弃这个想法(也可惜, 请看思路4).

思路3: 由思路1的推导中得出$y\leqslant 2$这个结论, 它虽然没有解决问题, 但对解题者是否

~~~~~~

要证直线AB经过M点, 即证$\overrightarrow{AM}$与$\overrightarrow{AB}$共线, 即证存在非零实数λ,

使得$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$.

又$\overrightarrow{AM}=\left\{-x_1,-2+\dfrac{1}{2}x_1^2\right\}$,

$\overrightarrow{AB}=\left\{x_2-x_1,-\dfrac{1}{2}x_2^2+\dfrac{1}{2}x_1^2\right\}$ $(x_1\neq x_2)$.

所以即证$(-x_1)\left(-\dfrac{1}{2}x_2^2+\dfrac{1}{2}x_1^2\right)-(x_2-x_1)\left(-2+\dfrac{1}{2}x_1^2\right)=0$,

又因为$(-x_1)\left(-\dfrac{1}{2}x_2^2+\dfrac{1}{2}x_1^2\right)-(x_2-x_1)\cdot\left(-2+\dfrac{1}{2}x_1^2\right)=\dfrac{1}{2}x_1x_2^2-\dfrac{1}{2}x_1^3+2x_2-\dfrac{1}{2}x_1^2x_2-2x_1+\dfrac{1}{2}x_1^3=\dfrac{1}{2}(-4)x_2+2x_2-\dfrac{1}{2}(-4)x_1-2x_1=0$.

所以$\overrightarrow{AM}$与$\overrightarrow{AB}$共线, 即证得直线AB经过M点.

此题用向量法解决, 其思路清晰, 操作只需机械进行, 对于逻辑推理要求相对不高, 因而不失为一种较方便的方法. 在求解过程中, 除了共线向量性质应用外, 还有就是垂直向量性质的运用. 另外解析几何中许多与垂直有关的问题, 用向量法也能得以很好的解决. 限于篇幅, 不再举例.

通过以上例子我们发现, 对于常规的解析几何问题, 向量法的主要思路是: 合理构造向量, 充分利用好向量的基本性质, 灵活掌握向量的基本运算. 其主要技巧是: 利用向量共线、垂直性质可解决解析几何中平行问题、共线问题、垂直问题; 而利用数量积公式可解决夹角、垂直、轨迹等问题.

对于向量的作用, 学生比较认同在平面几何及立体几何中的应用, 但对于其在解析几何中的运用还很陌生. 其实由于两者在本质上的相似性, 其中必然存在着一些联系. 通过以上例题我们也可以看出, 向量法确实是解决解析几何问题的一把利剑.
~~~~~~

全无意义呢? 它使解题者了解了这个函数的一些方面, 这些方面对寻求解法有帮助吗 (想法可贵, 这是一种思维的反馈, 是思维受阻后应有的反应)?

于是, 有下面的思考:

思考1: $y \leqslant 2$ 中等号成立吗? 令 $y=2$, 由 ① 可得 $4x^2-12x+9=0$, $\therefore\ x=\dfrac{3}{2}$. 由于 $x=\dfrac{3}{2}\in\left[\dfrac{12}{13},4\right]$, 所以当 $x=\dfrac{3}{2}$ 时等号成立, 于是可知 $y_{\max}=2$.

思考2: 由此说来, 函数 $y=f(x)$ 在 $\left[\dfrac{12}{13},4\right]$ 上有最大值2, 于是可以猜想, 这个函数在 $x\in\left[\dfrac{12}{13},4\right]$ 上是上凸函数, 即当 $x\in\left[\dfrac{12}{13},\dfrac{3}{2}\right]$ 时, $f(x)$ 单调递增, 当 $x\in\left[\dfrac{3}{2},4\right]$ 时, $f(x)$ 单调递减. 如果猜想成立, 它的最小值应是 $f\left(\dfrac{12}{13}\right)$ 和 $f(4)$ 中的较小者.

思考3: 证明或推翻这个猜想.

设 $\dfrac{12}{13}\leqslant x_1<x_2<\dfrac{3}{2}$, 有

$$\begin{aligned}&f^2(x_2)-f^2(x_1)\\=&\frac{12x_2-9}{x_2^2}-\frac{12x_1-9}{x_1^2}\\=&\frac{12x_1x_2(x_1-x_2)-9(x_1^2-x_2^2)}{x_1^2x_2^2}\\=&\frac{(x_1-x_2)(12x_1x_2-9x_1-9x_2)}{x_1^2x_2^2},\end{aligned}$$

其中 $x_1-x_2<0$, $x_1^2x_2^2>0$, 若猜想成立, 只需证明 $12x_1x_2-9x_1-9x_2<0$ 成立, 即只需证明 $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}>\dfrac{4}{3}$ ……………………………… ②

成立. 由于 $\dfrac{1}{x_1}\in\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{13}{12}\right]$, $\dfrac{1}{x_2}\in\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{13}{12}\right)$, 所以 $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}\in\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{13}{6}\right)$, 可见 ② 式成立. 则可知函数 $y=f(x)$ 在 $x\in\left[\dfrac{12}{13},\dfrac{3}{2}\right]$ 时, 确是单调递增函数.

同理可证, $f(x)$ 在 $x\in\left[\dfrac{3}{2},4\right]$ 时, 确是单调递减函数, 猜想成立.

思考4: 函数 $y=f(x)$ 的“面貌”清楚, 最小值可求, 由于 $f\left(\dfrac{12}{13}\right)=\dfrac{\sqrt{12\times\dfrac{12}{13}-9}}{\dfrac{12}{13}}=\dfrac{\sqrt{39}}{4}$, $f(4)=\dfrac{\sqrt{12\times4-9}}{4}=\dfrac{\sqrt{39}}{4}$, 且 $f(x)_{\max}=2$, 其单调性如前所证, 可知它的图象如图1所示.

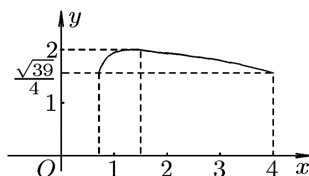


图 1

由于 $f\left(\dfrac{12}{13}\right)=f(4)=\dfrac{\sqrt{39}}{4}$, 所以 $y_{\min}=\dfrac{\sqrt{39}}{4}$, 思路3成功.

思路4: 由思路1产生的方程 ① 是否还另有利用的价值? 可否通过定义域 $x\in\left[\dfrac{12}{13},4\right]$ 和不等式反求值域?

解方程 ① 得解 $x=\dfrac{12\pm\sqrt{144-36y^2}}{2y^2}=\dfrac{6\pm3\sqrt{4-y^2}}{y^2}$, 于是应有 $\dfrac{12}{13}\leqslant\dfrac{6-3\sqrt{4-y^2}}{y^2}\leqslant\dfrac{6+3\sqrt{4-y^2}}{y^2}\leqslant4$, 此式等价于不等式组

$$\begin{cases}\dfrac{6-3\sqrt{4-y^2}}{y^2}\geqslant\dfrac{12}{13},\\[2mm]\dfrac{6+3\sqrt{4-y^2}}{y^2}\leqslant4,\end{cases}$$

解该不等式组, 得 $2\geqslant y\geqslant\dfrac{\sqrt{39}}{4}$, 于是得 $y_{\min}=\dfrac{\sqrt{39}}{4}$. 思路4获得成功.

思路5: 思路3虽然成功, 但解法冗长, 是否应另有蹊径? 能否把它化归为常见函数, 用常规方法求解?

思考1: 解析式变形, 得 $y=\dfrac{\sqrt{12x-9}}{x}=\sqrt{\dfrac{12x-9}{x^2}}$ ($\because\ x>0$), 仍未见端倪, 再继续变形得 $y=f(x)=\sqrt{\dfrac{12}{x}-\dfrac{9}{x^2}}$, 突然发现用换

元法有 $y=f(x)=\sqrt{-9\left(\frac{1}{x}\right)^2+12\cdot\frac{1}{x}}$, 成功, 根号内是一个常见的关于 $\frac{1}{x}$ 的二次函数, 于是有常规的解法 $y=\sqrt{-9\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{3}\right)^2+4}$, 其中 $\frac{1}{x}\in\left[\frac{1}{4},\frac{13}{12}\right]$, 且 $\left|\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{2}{3}-\frac{13}{12}\right|$, 所以 $f(x)_{\min}=f(4)=f\left(\frac{12}{13}\right)=\frac{\sqrt{12\times4-9}}{4}=\frac{\sqrt{39}}{4}$. 这个解法是显然优于思路3的成功解法.

思考2: 由思考1的成功, 回忆起思路2所得的有理函数 $u=y^2=\frac{12x-9}{x^2}$, 显然也可以用换元法化归为常见函数 $u=y^2=-9\left(\frac{1}{x}\right)^2+12\cdot\frac{1}{x}$, 用常规方法求解(略).

思路6: 当我们已知问题的结果时, 是否有更直接, 更简便的解法存在?

实际上, 命题已转化为证明不等式 $\frac{\sqrt{12x-9}}{x}\geqslant\frac{\sqrt{39}}{4}$ 成立 (包括等号), 即只需证明 $13x^2-64x+48\leqslant0, x\in\left[\frac{12}{13},4\right]$, $(13x-12)(x-4)\leqslant0, x\in\left[\frac{12}{13},4\right]$ 成立. 事实上, 由于 $x\in\left[\frac{12}{13},4\right]$, 所以此式必成立, 且 $x=\frac{12}{13}$ 或 $x=4$ 时等号成立, 亦可得 $y_{\min}=\frac{\sqrt{39}}{4}$.

用演绎法证明如下:

$$x\in\left[\frac{12}{13},4\right]\iff\left(x-\frac{12}{13}\right)(x-4)\leqslant0$$
$$\iff13x^2-64x+48\leqslant0\iff\frac{64x-48}{x^2}\geqslant13$$
$$\iff\frac{12x-9}{x^2}\geqslant\frac{39}{16}\iff\frac{\sqrt{12x-9}}{x}\geqslant\frac{\sqrt{39}}{4}.$$

当 $x=4$ 或 $x=\frac{12}{13}$ 时等号成立.

如果不了解分析的过程, 这真是一个不可思议的奇妙解法.

思路7: 用数形结合法解如何?

由思路3得出函数的图象, 但难度颇大, 于是产生联想, 可否由常见图形出发, 用数形结合方法求解?

不难发现 $\sqrt{12x-9}$ 的图象是抛物线的一部分, 即 $y_1=\sqrt{12x-9}$, $x\in\left[\frac{12}{13},4\right]$ 的图象是抛物线 $y_1^2=12\left(x-\frac{3}{4}\right)$, $x\in\left[\frac{12}{13},4\right]$ 且 $y_1>0$ 的一段(如图2). 这时有 $y=\frac{y_1}{x}$, y 的值则是曲线上的点和原点连线的斜率. 观察图2, 曲线的端点与原点所决定的直线的斜率最小, 则 $y_{\min}=\frac{\sqrt{39}}{4}$. 这是一蹊跷而优美的解法.

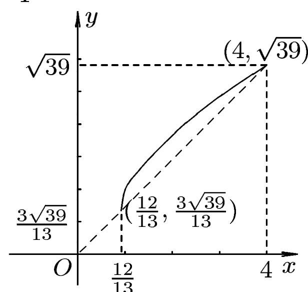


图 2

对这个解题思路的分析, 如图3所示.

从图3中可以看出思维受阻时应当怎么办.

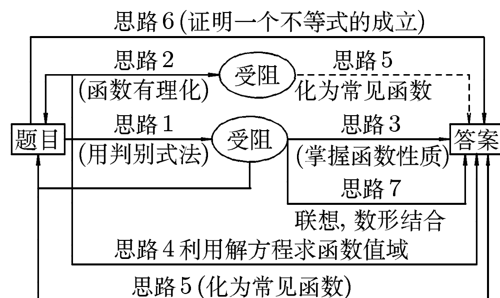


图 3

(1) 草履虫效应. 据说, 草履虫前进受阻时, 会自动退回原处, 转一个角度, 再前进; 再受阻, 再退回, 再转一个角度, 再前进……, 直到通过, 所以解题时思维受阻, 应当学习草履虫, 退回原处, 从已知条件中另觅出路, 像思路4的产生那样.

(2) 失败是成功之母. 思维受阻时, 常认为是想法错误, 立即丢弃, 但是失败是成功之母, 要从失败中寻找成功的萌芽, 像思路3的产生那样.

(下转第1–40页)

也谈求解参数范围的策略

200081 上海市北郊高级中学 杜 平

本刊2004年第6期刊登了于秀梅、商俊宇两位老师的“求解圆锥曲线中参数范围的策略”一文(以下简称文[1]), 读后很有启发, 现再提出两个问题:

(1) 文[1]中仅列举了圆锥曲线中参数范围的六种求解策略, 其中是否存在更深层次的求解规律?

(2) 参数的范围问题,不仅存在于圆锥曲线中, 而且还广泛地出现在中学数学的其它内容中, 那么其它情形范围问题的求解策略又怎样? 对此, 作如下探讨:

所谓参数的范围是指某个含参数的数学对象在给定条件下的参数允许取值的全体, 如文[1]中例1, 数学对象为点P及点$M(-1,0)$、$N(1,1)$, 其中含参数m, 所给定的条件有两个: 点P到点M、N距离之差为$2m$及到x轴、y轴距离之比为2. 显然, m的取值不是任意的, 本题即求满足两条件所有允许的m值. 求解时文[1]中紧扣两条件, 寻求其对m的限制, 先由P、M、N三点不共线得$0<m<1$. ①

其次由双曲线上点坐标的范围得

$$\frac{m^2(1-m^2)}{1-5m^2}\geqslant m^2. \quad ②$$

然后再由①、②解集的交集得解. 从中可知, 求参数范围的本质是根据条件寻求对参数的限制, 再由这种限制得出参数的范围. 参数的范围一般用不等式表示, 这样寻求对参数的限制可优先考虑化归为关于参数的不等式(组), 然后通过解不等式(组)得出所求. 纵观文[1]中给出的几种求解策略, 就是把对m的限制用含参数的不等式表示的几种途径. 由上探讨易知, 求解圆锥曲线中参数范围的一般解题思路为:

给定条件 $\xRightarrow{\text{寻求}}$ 对参数的限制 $\xRightarrow{\text{化归}}$

- 不等式(组)
  - 由数寻找
    - 用判别式(如文[1]例4)
    - 用基本不等式(如文[1]例6)
    - 用已知变量范围(如文[1]例3)
    - 用圆锥曲线定义(如文[1]例1)
    - ……
  - 由形寻找(如文[1]例2及本文例2)
- 函数值域(如本文例1)

例1 (2004年全国新课程数学高考理科第21题) 给定抛物线$C: y^2=4x$, F是C的焦点, 过点F的直线l与C相交于A、B两点. (I)略; (II)设$\overrightarrow{FB}=\lambda\overrightarrow{AF}$, 若$\lambda\in[4,9]$, 求$l$在$y$轴上截距的变化范围.

解: (II)设$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$, 又$F(1,0)$. 由题设$\overrightarrow{FB}=\lambda\overrightarrow{AF}$得

$$(x_2-1,y_2)=\lambda(1-x_1,-y_1),$$

即$\begin{cases} x_2-1=\lambda(1-x_1), & ①\\ y_2=-\lambda y_1. & ② \end{cases}$

由②得$y_2^2=\lambda^2y_1^2$, $\because y_1^2=4x_1$, $y_2^2=4x_2$, $\therefore x_2=\lambda^2x_1$. ③

联立①、③得$x_2=\lambda$, 依题意有$\lambda>0$,

$\therefore B(\lambda,2\sqrt{\lambda})$或$B(\lambda,-2\sqrt{\lambda})$, 则直线$l$的方程为$(\lambda-1)y=2\sqrt{\lambda}(x-1)$或$(\lambda-1)y=-2\sqrt{\lambda}(x-1)$.

当$\lambda\in[4,9]$时, l在y轴上的截距$b=\dfrac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda-1}$或$b=-\dfrac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda-1}$, 考察函数

$$b=\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda-1}=\frac{1}{\sqrt{\lambda}+1}+\frac{1}{\sqrt{\lambda}-1}$$

可知它在[4,9]上是递减的.

$\therefore$ 关于λ的函数b的值域为$\left[\dfrac{3}{4},\dfrac{4}{3}\right]$.

同理$b=-\dfrac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda-1}\in\left[-\dfrac{4}{3},-\dfrac{3}{4}\right]$.

$\therefore$ 直线l在y轴上截距的变化范围为

$\left[-\frac{4}{3},-\frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4},\frac{4}{3}\right]$.

点评: 求参数的范围更多的是利用不等式, 而这里利用了函数的值域. 须指出, 题中参数λ范围已知, 所求范围是解题过程中设出的另一个参数b的范围, b是λ的函数. 由此可见, 若所求参数(变量)是另一变量的函数时, 可考虑用函数值域求范围. 其实, 文[1]中例3也可用函数值域来求: 由文[1]中例3解题过程知: $\lambda = \frac{e^2-1}{e^2+2}$, 则$e^2 = \frac{1+2\lambda}{1-\lambda}$ $\left(\frac{2}{3} \leqslant \lambda \leqslant \frac{3}{4}\right)$, 求此关于$\lambda$的函数的值域后开方便得$e$的范围.

例2　已知两点$A(3,3)$、$B(-1,5)$, 直线$l: y = kx+1$与线段AB有公共点, 求实数k的范围.

解: 由图1, 可知直线l过点$C(0,1)$, 要使l与线段AB有公共点, 直线l须夹在AC、BC两直线之间. 而$k_{AC} = \frac{2}{3}$, $k_{BC} = -4$. 故$k \geqslant \frac{2}{3}$或$k \leqslant -4$.

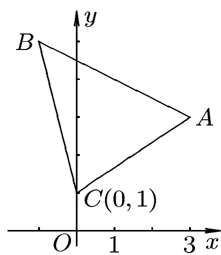


图 1

点评: 这是由形寻求关于参数不等式的解的例子.

至此, 不难发现上面总结的求解思路大体上也适合于其它情形中参数范围的求解. 这样, 本文开头提出的两个问题基本得到解决. 对不是解几中参数范围的求解问题再举例如下:

例3　在四面体$V-ABC$中, $AB = BC = 2$, $\angle ABC = 120°$, $VA \perp$平面ABC, 求异面直线AC与VB所成角α的取值范围.

解: 取AB、VA、BC中点D、F、E, 则$\angle FDE$或其补角为所求. 设$VA = 2x$, 则$FD = \sqrt{1+x^2}$, 而$AC = 2\sqrt{3}$, 则$DE = \sqrt{3}$, 作$EG \perp AC$于G, $GE = \frac{1}{2}$, $AG = \frac{3}{2}\sqrt{3}$, 于是$AE = \sqrt{AG^2+GE^2} = \sqrt{7}$, $EF = \sqrt{7+x^2}$,

$$\cos\angle FDE = \frac{FD^2+DE^2-EF^2}{2\cdot FD\cdot ED} = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{1+x^2}} \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right),$$

从而$\alpha \in \left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$.

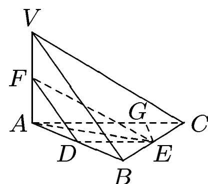


图 2

点评: 此例是立体几何中参数的范围问题, 利用函数值域求参数范围.

例4　锐角$\triangle ABC$中, 已知两边$a = 1$, $b = 2$, 求第三边c的取值范围.

解: 据题意得

$$\begin{cases} \cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{c^2-3}{2c} > 0, \\ \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{5-c^2}{4} > 0, \\ |a-b| < c < a+b, \end{cases}$$

解之, 得$\sqrt{3} < c < \sqrt{5}$.

例5　(2004年上海数学高考题) 记函数$f(x) = \sqrt{2-\frac{x+3}{x+1}}$的定义域为$A$, $g(x) = \lg[(x-a-1)(2a-x)]\,(a<1)$的定义域为$B$.

(1) 求A;

(2) 若$B \subseteq A$, 求实数a的取值范围.

解: (1) 由$2-\frac{x+3}{x+1} \geqslant 0$, 得$x < -1$或$x \geqslant 1$, 即$A = (-\infty,-1) \cup [1,+\infty)$.

(2) 由$(x-a-1)(2a-x) > 0$及$a < 1$得$B = (2a, a+1)$. $\because B \subseteq A$, $\therefore 2a \geqslant 1$或$a+1 \leqslant -1$即$a \geqslant \frac{1}{2}$或$a \leqslant -2$, 而$a < 1$, $\therefore \frac{1}{2} \leqslant a < 1$或$a \leqslant -2$. 故当$B \subseteq A$时, 实数$a$的取值范围是$(-\infty,-2] \cup \left[\frac{1}{2},1\right)$.

例6　(2003年全国数学高考题) 已知$c > 0$, 设P: 函数$y = c^x$在$\mathbf{R}$上单调递减. Q: 不等式$x+|x-2c| > 1$的解集为$\mathbf{R}$. 如果P和Q有且仅有一个不正确, 求c的取值范围.

解: 函数$y=c^x$在$\mathbf{R}$上单调递减$\Longleftrightarrow 0<c<1$. 不等式$x+|x-2c|>1$解集为$\mathbf{R}\Longleftrightarrow$函数$y=x+|x-2c|$在$\mathbf{R}$上恒大于1.

$\because x+|x-2c|=\begin{cases}2x-2c, & x\geqslant 2c,\\ 2c, & x<2c,\end{cases}$

$\therefore$ 函数$y=x+|x-2c|$在$\mathbf{R}$上的最小值为$2c$. $\therefore$ 不等式$x+|x-2c|>1$的解集为$\mathbf{R}\Longleftrightarrow 2c>1\Longleftrightarrow c>\dfrac{1}{2}$.

如果P正确, 且Q不正确, 则$0<c\leqslant\dfrac{1}{2}$.

如果P不正确, 且Q正确, 则$c\geqslant 1$.

所以c的取值范围为$\left(0,\dfrac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty)$.

例7 已知$f(x)=\log_m\dfrac{x-3}{x+3}\,(0<m<1)$, 求使$f(x)$的定义域为$[\alpha,\beta]\,(\beta>\alpha>0)$, 值域为$[\log_m(\beta-1)m,\log_m(\alpha-1)m]$的$m$的取值范围.

解: $\because \dfrac{x-3}{x+3}>0$, 且$x\in[\alpha,\beta]\,(\beta>\alpha>0)$, $\therefore \dfrac{x-3}{x+3}$当$x>3$时单调递增, 又$0<m<1$, $\therefore f(x)$当$x>3$时单调递减, 则有

$$\begin{cases}f(\alpha)=\log_m\dfrac{\alpha-3}{\alpha+3}=\log_m(\alpha-1)m\\ f(\beta)=\log_m\dfrac{\beta-3}{\beta+3}=\log_m(\beta-1)m\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}m\alpha^2+(2m-1)\alpha+3-3m=0\\ m\beta^2+(2m-1)\beta+3-3m=0\end{cases}\Longrightarrow$$

α、β是方程$mx^2+(2m-1)x+3-3m=0$在$(3,+\infty)$上两不同实根.

令$g(x)=mx^2+(2m-1)x+3-3m$, 则$g(x)$的图象在$(3,+\infty)$上有两个不同的交点, 其充要条件是

$$\begin{cases}g(3)\geqslant 0\\ -\dfrac{2m-1}{2m}>3\\ g\left(-\dfrac{2m-1}{2m}\right)<0\\ 0<m<1\end{cases}$$

$$\Longrightarrow m\in\left(0,\frac{2-\sqrt{3}}{4}\right).$$

点评: 本题求解的关键是将原问题化归为一元二次方程根的分布问题, 而根的分布问题通常转化为不等式(组)处理.

例8 (2001年上海数学高考题) 对任意函数$f(x)$, $x\in D$. 可按图3构造一个数列发生器, 其工作原理如下: ① 输入数据$x_0\in D$, 经数列发生器输出$x_1=f(x_0)$; ② 若$x_0\notin D$, 则数列发生器结束工作; 若$x_1\in D$, 则将x_1反馈回输入端, 再输出$x_2=f(x_1)$, 并依次规律继续下去. 现定义$f(x)=\dfrac{4x-2}{x+1}$.

(1)、(2) 略;

(3) 若输入x_0时, 产生的无穷数列$\{x_n\}$满足: 对任意正整数n, 均有$x_n<x_{n+1}$, 求x_0的取值范围.

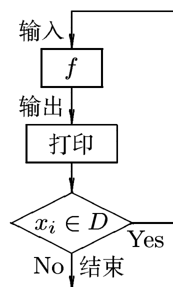


图 3

解: (3) 解不等式$x<\dfrac{4x-2}{x+1}$得$x<-1$或$1<x<2$, 要使$x_1<x_2$, 则$x_1<-1$或$1<x_1<2$.

对于函数$f(x)=\dfrac{4x-2}{x+1}=4-\dfrac{6}{x+1}$,

若$x_1<-1$, 则$x_2=f(x_1)>4$, $x_3=f(x_2)<x_2$.

当$1<x_1<2$时, $x_2=f(x_1)>x_1$, 且$1<x_2<2$, 依次类推, 可得数列$\{x_n\}$的所有项均满足$x_{n+1}>x_n\,(n\in\mathbf{N})$. 综上所述, $x_1\in(1,2)$, 由$x_1=f(x_0)$, 得$x_0\in(1,2)$.

点评: 由$x<\dfrac{4x-2}{x+1}$得$x<-1$或$1<x<2$是$x_{n+1}>x_n$成立的必要条件, 还须把它修正为充分条件.

参考文献:

1. 于秀梅、商俊宇. 求解圆锥曲线中参数范围的策略. 数学教学. 2004. 6.

2. 国家考试中心及上海考试院提供的相关数学高考试题及解答.

图象直观致误例析

315201 浙江省宁波镇海中兴中学 陈 斌

在解题时, 有时把数转化为形, 以形直观地表达数来解决, 往往使复杂问题简单化、抽象问题具体化. 但是, 过分依赖图象直观解题, 也要注意如下几个问题.

一、注意图象延伸趋势

例1 判断命题: "当$a>1$时, 关于x的方程$a^x=\log_a x$无实解." 正确与否.

错解: 在同一坐标系中分别作出函数$y=a^x$及$y=\log_a x$的图象$(a>1)$ (如图1), 可见它们没有公共点, 所以方程无实解, 命题正确.

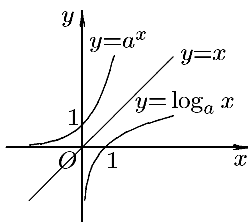


图 1

评析: 实际上对不同的实数a, $y=a^x$和$y=\log_a x$的图象的延伸趋势不同. 例如当$a=2$时, 方程无实数解; 而当$a=\sqrt{2}$时, $x=2$是方程的解. 说明两图象向上延伸时, 一定相交, 交点在直线$y=x$上.

二、注意图象伸展"速度"

例2 比较2^n与n^2的大小, 其中$n\geqslant 2$, 且$n\in\mathbf{N}_+$.

错解: 在同一坐标系中分别作出函数$y=2^x$及$y=x^2$的图象(如图2).

由图可知, 两图象有一个公共点.

当$x=2$时, $2^x=x^2$;

当$x>2$时, $2^x<x^2$.

$\therefore$ 当$n=2$时, $2^n=n^2$;

当$n>2$, 且$n\in\mathbf{N}_+$时, $2^n<n^2$.

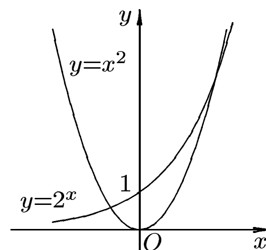


图 2

评析: 事实上, 当$n=4$时, 2^n与n^2也相等; 当$n=5$时, $2^n>n^2$. 错因是没有充分注意到两个图象在$x\geqslant 2$上的递增"速度"! 要比较两图象的递增速度, 确实很难由图象直观而得. 本题可以先猜想, 后用数学归纳法证明.

本题的正确答案是

当$n=2$、4时, $2^n=n^2$;

当$n=3$时, $2^n<n^2$;

当$n\geqslant 5$, 且$n\in\mathbf{N}_+$时, $2^n>n^2$.

证明略.

三、注意数形等价转化

例3 已知方程$x^2+2kx-3k=0$有两个实根在-1与3之间, 求k的取值范围.

错解: 令$f(x)=x^2+2kx-3k$, 结合题意画出图象3中的(1), 再由图象列出不等式组:

$$\begin{cases}\Delta\geqslant 0\\ f(-1)>0\\ f(3)>0.\end{cases}\qquad(*)$$

解略.

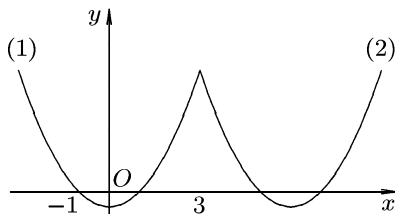


图 3

评析: 事实上, 不等式组(∗)并不与题意等价, 图象3中的(2)也满足不等式组(∗), 但两实根均大于3, 还可以举出两实根均小于-1的反例. 因此, 数形转化要注意等价性.

四、注意仔细观察图象

例4 已知关于x、y的方程组

$$\begin{cases} b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \\ y=x^2+m \end{cases} \quad (a>b>0)$$

有四组实数解, 求a、b、m应满足的关系.

错解: 已知方程组中的两个方程分别是椭圆和抛物线的方程, 原方程组有四组实数解等价于椭圆与抛物线有四个不同的公共点. 由图4知, $m<-b$, 且$\sqrt{-m}<a$, 即$-a^2<m<-b$.

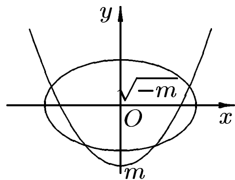


图 4

评析: 观察图象过于草率! 事实上, 图5也是一种可能的情形, 即当$\sqrt{-m}=a$时, 仍有可能为四组解. 例如当$a=2$, $b=1$, $m=-4$时, 可得解集为: $\left\{(2,0),(-2,0),\left(\frac{\sqrt{15}}{2},-\frac{1}{4}\right),\left(-\frac{\sqrt{15}}{2},-\frac{1}{4}\right)\right\}$.

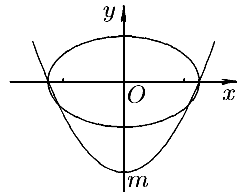


图 5

现用数形结合求解:

考虑一元二次方程

$a^2y^2+b^2y-(m+a^2)b^2=0$,

令$\Delta=0$(即相切情形), 解得

$$m=-\frac{4a^4+b^2}{4a^2},$$

结合图象, 注意到$m<-b$, 则a、b、m应满足的关系是

$$-\frac{4a^4+b^2}{4a^2}<m<-b.$$

从以上看出, 有些问题可以用图象解得, 但要认真分析, 有些问题很难由图象直观而得, 值得注意.

(上接第1–43页)

签”代替. 这时“有放回”就是每一次抽到的签还要再放回抽筒里; ② 把“至少两次答对同一题”也视为“合格”.

分析: 一次试验看成是抽测一个试题, 这就成了有放回的重复独立试验模型. 即: ① 任意两次抽测之间是相互独立的; ② 每一次抽测都有“答对”、“答不对”两个事件; ③ 各次抽测中, “答对”的概率相同, “答不对”的概率也相同. 在此题中, 完成一次测试需要做3次试验.

解: (1)甲抽到会答题的次数ξ的概率分布为

ξ	0	1	2	3
P	$C_3^0\left(\frac{4}{10}\right)^3=\frac{8}{125}$	$C_3^1\frac{6}{10}\left(\frac{4}{10}\right)^2=\frac{36}{125}$	$C_3^2\left(\frac{6}{10}\right)^2\frac{4}{10}=\frac{54}{125}$	$C_3^3\left(\frac{6}{10}\right)^3=\frac{27}{125}$

$E\xi=\cdots=1.80$.

(II) (过程略, 答案约为0.96).

例2 在例1中, 增加一个“首次答错终考制”的规定, 即被测者只要一次答不对, 就不能再抽答下一题, 其它条件和设问不变.

分析: 和例1一样, 这也是有放回重复独立试验模型, 但和例1不同的是, 题中设定的试验次数并不固定为3(可以是1或2或3).

解: (I)甲抽到会答题的次数ξ的概率分布为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$	$\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{10}=\frac{6}{25}$	$\left(\frac{6}{10}\right)^2\frac{4}{10}=\frac{18}{125}$	$\left(\frac{6}{10}\right)^3=\frac{27}{125}$

$E\xi=\cdots=1.176\approx1.18$.

(II) (过程略, 答案约为0.77).

2004年上海市中考数学试卷的探讨

200070 上海市闸北区教育局教研室 戚怀志

总体上, 2004年的上海市中考数学试卷是有特色的. 在把握基本要求、降低难度、考查数学基础能力以及重视能力考查等方面做了很好的努力, 本刊已有专文刊出[1]. 但是, 勿庸讳言, 今年的上海市中考试卷中也存在着一些值得研究的问题, 现在提出来, 和同行们一起探讨.

1. 试题所考查的内容所占的比例问题

下表中列出的是2003年与2004年上海市中考数学试卷所考查的一元二次方程、函数、统计初步、相似形、锐角三角比、圆等主要知识内容的分值及其所占比值的情况:

	一元二次方程	函数	统计初步	相似形	锐角三角比	圆	其它
2003年	15分 12.50%	32分 26.67%	7分 5.83%	8分 6.67%	2分 1.67%	8分 6.67%	48分 40.00%
2004年	21分 17.50%	32分 26.67%	9分 7.50%	7分 5.83%	7分 5.83%	14分 11.67%	30分 25.00%

从上表中可以看出2003年和2004年的上海市中考数学试卷所考查的函数内容所占比值仍然较大, 相似形、锐角三角比内容所占比值较小.

数学中考试卷有稳定性功能、导向性功能、选拔性功能和创新性功能. 其中的导向性功能就是要引导初中数学课堂教学重视课本、重视双基、重视过程. 一元二次方程、函数、统计初步、相似形、锐角三角比、圆等知识内容都是初中数学课本中的基础知识和基本技能, 它们中的每一个的教学过程都是发展学生数学能力的重要过程. 如果片面地强调与高中阶段衔接, 而忽略初中阶段的数学教学自身的目标, 对初中数学教学的导向是不好的.

2. 第5题的换元法不是基本要求的换元

在初中数学里, 换元法解分式方程时, 仅要求能解"平方关系换元"和"倒数关系换元"两类简单的分式方程习题. 但是今年的上海市中考数学试卷中第5题是:

用换元法解方程式$x^2+\dfrac{1}{x^2}+x+\dfrac{1}{x}=4$, 可设$y=x+\dfrac{1}{x}$, 则原方程化为$y$的整式方程是__________.

这是个"配方后的平方关系换元"的试题, 要求较高. 将它安排在基础部分的第5题, 是欠妥的, 会给有意扩展数学教学要求的教师发出错误的信号.

3. 第21题的翻折图形的虚线画法易造成错觉

通常, 在初中数学里, 虚线的作用有三个. 一是表示实际上看不见的线. 这在上海市课本《数学》六年级第二学期第六章《长方形与长方体》里可以找到这样的例子 (如图1); 二是表示图形运动前的位置. 例如《数学》七年级第一学期第十一章《平移与平行线》中的图11–10 (如图2), 图中下面的虚线三角形是平移前的位置, 而实线三角形则是平移后的位置; 三是表示解题者所添加的辅助线. 这种例子举不胜举, 如图3中BD就是证题者所添加的辅助线.

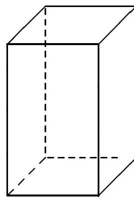


图 1

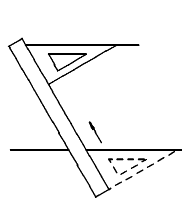


图 2

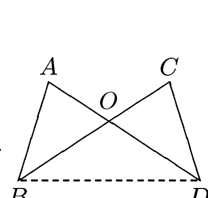


图 3

但是2004年上海市中考数学试题的第21题中的虚线的作用却可探讨.

第21题试题如下: 如图4, 在等腰梯形$ABCD$中, $AD /\!/ BC$, $\angle DBC=45°$. 翻折

梯形$ABCD$, 使点B重合于点D, 折痕分别交边AB、BC于点F、E. 若$AD=2$, $BC=8$.

求: (1) BE的长; (2) $\angle CDE$的正切值.

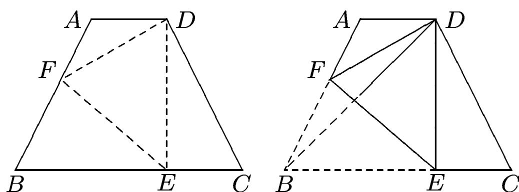


图 4　　图 5

2004年上海市中考数学试题第21题的图中以虚线画了一个三角形. 由于原题没有翻折图形复原的叙述, 图形的虚线三角形既不能被理解为翻折前的位置, 也不被理解为翻折后的位置. 这样的图形无法使学生正确理解图形的运动过程.

笔者根据对2004年上海市中考数学试题第21题题意的理解, 认为如果将线段BD看成是翻折前连结的, 那么可以画成如图5的图形.

4. 压轴题的编制值得探讨

2004年上海市中考数学试卷的压轴题第27题是: 数学课上, 老师出示图6和下面框中条件.

> 如图6, 在直角坐标平面内, 点O为坐标原点, 点A坐标为(1,0), 点B在x轴上且在点A的右侧, $AB=OA$. 过点A和B作x轴的垂线, 分别交二次函数$y=x^2$的图象于点C和D. 直线OC交BD于点M, 直线CD交y轴于点H. 记点C、D的横坐标分别为x_C、x_D, 点H的纵坐标为y_H.

同学发现两个结论:

① $S_{\triangle CMD}:S_{梯形ABMC}=2:3$;

② 数值相等关系: $x_C\cdot x_D=-y_H$.

(1) 请你验证结论 ① 和结论 ② 成立;

(2) 请你研究: 如果将上述框中的条件"点A坐标为(1,0)" 改为"点A坐标为$(t,0)$ $(t>0)$", 其它条件不变, 结论 ① 是否仍成立? (请说明理由)

(3) 进一步研究: 如果将上述框中的条件"点A坐标为(1,0)" 改为"点A坐标为$(t,0)$ $(t>0)$", 又将条件"$y=x^2$" 改为"$y=ax^2$ $(a>0)$", 其它条件不变, 那么x_C、x_D和y_H有怎样的数值关系? (写出结果并说明理由)

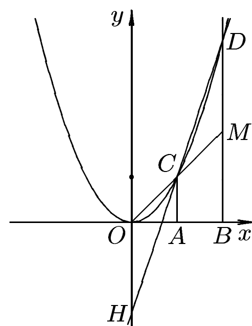


图 6

这道试题有一定的新意, 但作为压轴题, 下述方面值得探讨.

首先, 这道试题思想方法单一. 第(1) ① 小题与第(2) 小题的解题思路雷同, 都是先求点A、B、C、D的坐标, 再求直线OC, 进而求点M的坐标, 最后求面积比. 而第(1) ② 小题与第(3) 小题的解题思路又雷同, 都是先运用待定系数法求直线CD, 进而求点H的坐标, 最后验证等式. 它们的差别都仅仅在于后者在式的变形中有字母的参与. 故压轴题综合作用显得不够突出. 压轴题应该有较多的能力综合.

其次, 这道试题的探索研究的实际意义不大, 人为编造痕迹过浓. 初中学生较多是形象化思维, 通常习惯于数与形的大小、图形位置关系的思考, 习惯于数形结合的思考. 而本道试题是抽象化的结论探索, 无较为明显的几何意义. 一般地说, 等式$x_C\cdot x_D=-y_H$不太可能被学生作为探索的结论而发现. 这类似于数学科研, 人为编制, 与学生所熟知的生活实际相去甚远.

再次, 这道试题的第(3) 小题的求解直线CD的解析式的过程中, 需要解一个含有双参数的方程组, 这似乎也是欠妥的.

另外, 这道试题的编排也略显繁杂, 层次较多, 容易造成少数学生漏解第(1)、(2) 小题.

以上是笔者的一些粗浅看法, 可能有点吹毛求疵. 笔者真心希望上海市中考数学试卷能够成为精品典范. 把自己的想法提出来, 以求

(下转第1–5页)

2004年中考数学情境性试题亮点扫描

317300 浙江省仙居县安洲中学 张国飞 317000 浙江省临海市第五中学 李梦虎

综观2004年全国各地的中考数学试题, 已出现了许多以现实生活、国情国策、社会热点以及科技成果为背景的情境性试题. 这些试题在考查学生应用数学知识分析问题、解决问题能力的同时, 也唤起了学生对国家、对社会、对生活的关注, 体现了数学试题的教育功能和人文价值, 成为2004年中考的一大亮点. 本文精选部分试题作些分析, 供品味、借鉴.

1. 关注现实生活, 从实际生活中选取素材

例1 (2004年江西省中考试题) 仔细观察下图, 认真阅读对话:



图1

根据对话内容, 试求出饼干和牛奶的标价各是多少元?

【评析】此题用对话框创设了一个小朋友购买饼干和牛奶的真实情境, 在这样新颖、有趣、亲切的情境下, 不但有助于学生准确理解题意, 消除紧张心理, 也能让学生感到数学就在身边, 体验到学习数学的价值.

2. 关注现实社会, 从国情国策中选取素材

例2 (2004年徐州市中考试题) 我市某乡规定: 种粮的农户均按每亩年产量750公斤、每公斤售价1.1元来计算每亩的年产值. 年产值乘农业税的税率就是应缴的农业税, 另外还要按农业税的20%上缴"农业税附加" ("农业税附加"主要用于村级组织的正常运转需要).

(1) 去年我市农业税的税率为7%, 王老汉一家种了10亩水稻, 他一共要上缴多少元?

(2) 今年, 国家为了减轻农民负担, 鼓励种粮, 降低了农业税率, 并且每亩水稻由国家直接补贴20元(可抵税款). 王老汉今年仍种10亩水稻, 他掰着手指一算, 高兴地说:"这样一减一补, 今年可以比去年少缴497元." 请你求出我市的农业税的税率是多少? (要有解题过程)

【评析】党和政府历来把农业、农村、农民当作头等大事来抓, 农业发展滞后、农民收入过低、农民负担过重是中国实现现代化的瓶颈问题, 党和政府密切关注着, 并采取各种措施加以改变, 在2004年中央发出促进农民增收的一号文件, 提出逐步降低农业税税率. 此题正是以政府鼓励种粮, 降低农业税税率, 进一步解决"三农"问题为背景设计试题情境, 旨在考查学生"知识与技能"掌握效果的同时, 引导学生也来关注"三农"问题.

3. 关注社会热点, 从重大事件中选取素材

例3 (2004年丽水市中考试题) 高致病性禽流感是比SARS病毒传染速度更快的传染病.

(1) 养殖场有8万只鸡, 假设有一只鸡得了禽流感, 如果不采取任何防治措施, 那么到第2天将新增病鸡10只, 到第3天又将新增病鸡100只, 以后每天新增病鸡依次类推. 请问: 到第4天, 共有多少只鸡得了禽流感? 到第几天, 该养殖场所有鸡都会被感染.

(2) 为防止禽流感蔓延, 政府规定: 离疫点3千米范围内为捕杀区, 所有禽类全部捕杀; 离疫点3至5千米范围内为免疫区, 所有的禽类强制免疫; 同时, 对捕杀和免疫区内的村庄、道路实行全封闭管理, 现有一条笔直的公路AB

通过禽流感病区, 如图2, O为疫点, 在捕杀区内的公路CD长为4千米, 问这条公路在该免疫区内有多少千米?

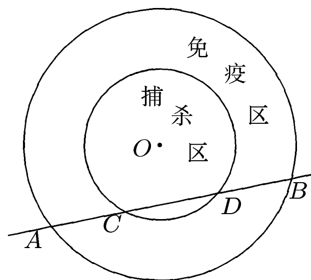


图 2

【评析】高致病性禽流感是继去年SARS病毒后又一对人民生命财产构成威胁, 主要在禽类中传播的传染病, 一度是社会关注的热点. 此题(1)、(2)两小题分别以高致病性禽流感流行特点及一些防治措施为题材设计的情境性试题. 旨在考查学生双基掌握情况的同时, 唤起学生对国家、对社会的关注, 增强他们的社会责任感.

4. 关注社会发展, 从科技、经济发展的最新成果中选取素材

例4　(2004年十堰市中考试题) 2003年10月15日, "神舟"五号载人飞船的圆满成功, 终于圆了中华民族几千年的飞天梦. 10月15日9时整, 火箭在震天撼地的轰鸣声中腾空而起, 急速飞向太空. 某同学看了有关报道, 作了如下假设: 飞船先竖直上升43km, 然后以仰角为$5°$的线路飞行, 于9时9分50秒准确进入离地343km的预定轨道, 开始巡天飞行. 飞船绕地球飞行十四圈后, 于10月16日5时56分飞船返回舱与推进舱成功分离, 结束巡天飞行, 飞船共巡天飞行了约6×10^5km, 飞船脱离预定轨道并以俯角为$5°$的线路返回地面 (已知: $\sin5° = 0.0872, \cos5° = 0.9962, \tan5° = 0.0875, \cot5° = 11.43$).

(1) 飞船巡天飞行的平均速度是多少km/s (结果精确到1km/s)? (注: km/s即千米/秒.)

(2) 请你估算飞天英雄杨利伟"天宫一日游"(从发射到返回地面) 的行程 (结果精确到1km).

【评析】"神舟"五号成功发射和安全着陆, 标志着中国人民在攀登世界科技高峰的征程上又迈出具有重大历史意义的一步, 是我国改革开放和社会主义现代化建设的又一伟大成就, 是我国高技术发展的又一里程碑, 是中国人民自强不息的又一非凡壮举, 是我们伟大祖国的荣耀. 此题是以发射过程的一组假设数据为素材编拟的一个情境性试题, 在考查学生应有知识解决问题能力的同时, 也让学生感受到我国在科技、经济的飞速发展, 体验到与时俱进的时代氛围, 增强了民族自豪感.

5. 关注实践操作和动手能力, 从数学活动中选取题材

例5　(2004年常州市中考试题) 用水平线和竖直线将平面分成若干个边长为1的小正方形格子, 小正方形的顶点叫格点, 以格点为顶点的多边形叫格点多边形. 设格点多边形的面积为S, 它各边上格点的个数和为x.

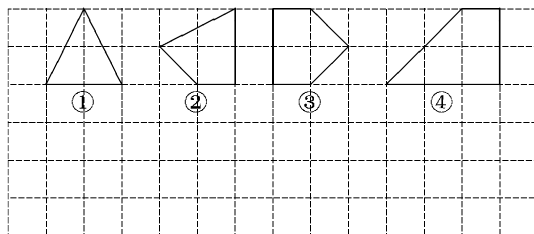


图 3

(1) 图3中的格点多边形, 其内部都只有一个格点, 它们的面积与各边上格点的个数和的对应关系如下表, 请写出S与x之间的关系式.

答: $S=$ ______.

多边形的序号	①	②	③	④	···
多边形的面积S	2	2.5	3	4	···
各边上格点的个数和x	4	5	6	8	···

(2) 请你再画出一些格点多边形, 使这些多边形内部都有而且只有2个格点. 此时所画的各个多边形的面积S与它各边上格点的个数和x之间的关系式是: $S=$ ______.

(3) 请你继续探索, 当格点多边形内部有且只有n个格点时, 猜想S与x有怎样的关系?

答: $S=$ ______.

【评析】此题通过创设"画格点多边形"这

中考试题中的平移与旋转

315000 浙江省宁波市效实中学 郑 瑄

图形的变换是义务教育阶段数学课程中"空间与图形"领域的一个主要内容. 新的数学课程标准在课程目标中已明确指出:"经历探索物体与图形的基本性质、变换、位置关系的过程, 掌握平移、旋转、轴对称、相似等基本性质." 现已出版使用的华师大版、北师大版两版教科书都已把"平移与旋转"内容放入教科书, 且都占有重要的位置. "平移与旋转", 它对发展学生空间观念, 丰富学生对空间图形的认识与感受, 欣赏并体验变换在现实生活中的广泛应用, 使学生经历观察、操作、推理、想象等探索过程, 注重对数学知识过程的理解,都有重要的意义. "平移与旋转"是《数学课程标准》中的加强内容. 综观2004年全国各地数学中考试题, 对"平移与旋转"内容已引起了广泛重视.

例1 (长春市2004年数学中考试题) 如图1, $AM/\!/DN$, 直线l与AM、DN分别交于点B、C. 在线段BC上有一点P, 直线l绕点P旋转. 请你写出变化过程中直线l与AD、AM、DN围成的图形的名称 (至少写出三个).

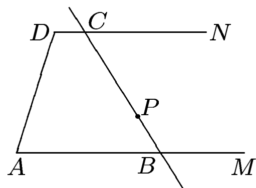


图 1

分析: 当直线l绕点P旋转过程中, 直线l与AD、AM、DN可以围成各种图形.

例2 (山东省聊城市2004年数学中考试题) 如图2, D是等腰Rt$\triangle ABC$内一点, BC是斜边, 如果将$\triangle ABD$绕点A按逆时针方向旋转到$\triangle ACD'$的位置, 则$\angle ADD'$的度数·( )

(A) 25°; (B) 30°; (C) 35°; (D) 45°.

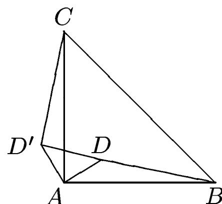


图 2

分析: 由旋转的性质可以得到 $\angle ADD' = 45°$.

简评: 本题考查学生对《标准》中图形的旋转教学目标: "对应点到旋转中心的距离相等, 对应点与旋转中心连线所成的角彼此相等的性质"的理解与认识.

例3 (上海市2004年数学中考试题) 如图3, 边长为3的正方形$ABCD$绕点C按顺时针方向旋转30° 后得到正方形$EFCG$, EF交AD于点H, 那么DH的长为__________.

分析: 由旋转的性质, 可以得到 $DH = \sqrt{3}$.

一操作情境, 让学生动手、动脑、观察、分析、猜想、论证, 从中探索结论, 寻找规律, 有效地考查了学生分析问题、解决问题的能力以及探究习惯和创新精神, 符合新课程理念.

在2004年全国各地的中考试题中, 还有许多以环境保护、市场经营、学科综合等为背景的情境性试题. 随着课程改革的不断深入, 在"学生的数学学习内容应当是现实的、有意义的、富有挑战性的, ······" 及"发展学生应用意识"的新课程理念下, 数学教学乃至数学学习评价要结合学生的数学现实, 必将获得更多的关注.

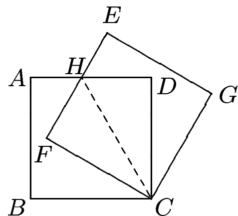


图 3

例4 (厦门市2004年数学中考试题) 已知正方形$ABCD$和正方形$AEFG$有一个公共点A, 点G、E分别在线段AD、AB上.

(1) 如图4, 连结DF、BF, 若将正方形$AEFG$绕点A按顺时针方向旋转, 判断命题: "在旋转的过程中线段DF与BF的长始终相等." 是否正确, 若正确请证明, 若不正确请举反例说明;

(2) 若将正方形$AEFG$绕点A按顺时针方向旋转, 连结DG, 在旋转的过程中, 你能否找到一条线段的长与线段DG的长始终相等. 并以图5为例说明理由.

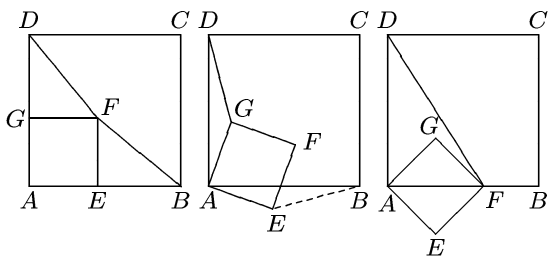


图 4 图 5 图 6

分析: (1) 正方形$AEFG$绕点A顺时针方向旋转过程中, 线段DF与BF不一定相等. 当正方形$AEFG$旋转到图4的位置时, 显然, $DF = FB$, 但当正方形$AEFG$旋转到图6位置时$DF \neq BF$.

(2) 在旋转过程中, 线段BE始终与DG的长相等.

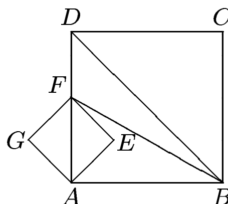
简评: 本题利用图形旋转的不变性, 探索图形在旋转过程中的有关规律, 让学生体验图形变换的理念与思想.

例5 (盐城市2004年数学中考试题) 如图7, 四边形$AEFG$与$ABCD$都是正方形, 它们的边长分别为a、$b\,(b \geqslant 2a)$, 且点F在AD上(以下问题的结果可用a、b表示).

(1) 求$S_{\triangle DBF}$;

(2) 把正方形$AEFG$绕点A逆时针方向旋转45° 得图8, 求图8中的$S_{\triangle DBF}$;

(3) 把正方形$AEFG$绕点A旋转任意角度, 在旋转过程中, $S_{\triangle DBF}$是否存在最大值、最小值? 如果存在, 试求出最大值、最小值; 如果不存在, 请说明理由.



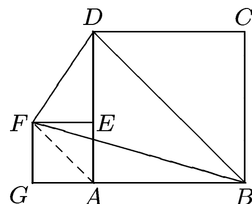
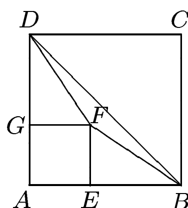


图 7 图 8

分析: (1)、(2)略.

(3) 第一种情况: 当$b > 2a$时, 存在最大值及最小值, ∵ $\triangle DBF$的边$BD = \sqrt{2}b$, 故当F点到BD的距离取得最大(小)值时, $S_{\triangle DBF}$取得最大(小)值. 当正方形$AGFE$绕A旋转到图9位置时, 这时F点到BD的距离最小. $S_{\triangle DBF(最小)} = \frac{1}{2}(b^2 - 2ab)$; 而当正方形$AGFE$绕$A$旋转到图10位置时, 此时$F$点到$BD$距离最大, ∴ $S_{\triangle DBF(最大)} = \frac{1}{2}(b^2+2ab)$.



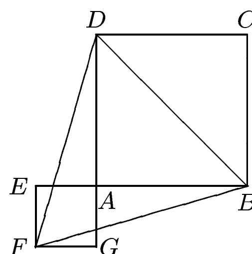


图 9 图 10

第二种情况: 当$b = 2a$时, $S_{\triangle DBF(最小)} = 0$.

简评: 本题要求学生利用旋转性质, 探索正方形$AEFG$在绕点A旋转过程中$\triangle DBF$的面积大小及它的最大值和最小值. 本题也是对学生空间想象、规律探索、推理能力的考查.

例6 (浙江省嘉兴市2004年数学中考试题) 如图11, 等腰直角三角形$ABC(\angle C=\text{Rt}\angle)$的直角边长与正方形$MNPQ$的边长均为4cm,

CA与MN在直线l上. 开始时A点与M点重合, 让$\triangle ABC$向右平移, 直到C点与N点重合时为止. 设$\triangle ABC$与正方形$MNPQ$的重叠部分(图中阴影部分)的面积为$y\,\text{cm}^2$, MA的长度为$x\,\text{cm}$, 则y与x之间的函数关系大致是……………………………………………( )

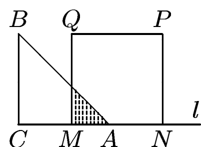
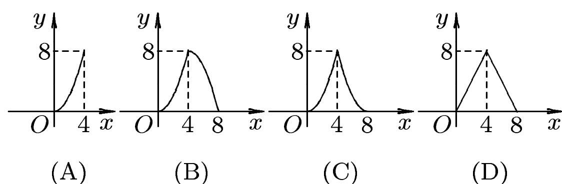


图 11



分析: $\triangle ABC$从起始位置向右平移到A与N点重合,则$\triangle ABC$与正方形$MNPQ$重叠部分面积$y=\dfrac{1}{2}x^2(0\leqslant x\leqslant 4)$,再从$A$与$N$重合的位置向右平移到$C$与$N$重合,则$\triangle ABC$与正方形$MNPQ$重叠部分面积为$y=-\dfrac{x^2}{2}+4x\,(4<x\leqslant 8)$,所以图象应选(B)

简评: 本题利用平移的基本性质, 探索$\triangle ABC$在向右平移过程中与正方形$MNPQ$的重叠部分面积变化规律,从而确定对应的函数图象.

例7 (重庆市2004年数学中考试题)如图12, 在直角坐标系中, 正方形$ABOD$的边长为a, O为原点, 点B在x轴的负半轴上, 点D在y轴的正半轴上, 直线OE的解析式为$y=2x$, 直线CF过x轴上的一点$C\left(-\dfrac{3}{5}a,0\right)$且与$OE$平行, 现正方形以每秒$\dfrac{a}{10}$的速度匀速沿$x$轴正方向平行移动,设运动时间为$t$秒,正方形被夹在直线$OE$和$CF$间的部分的面积为$S$.

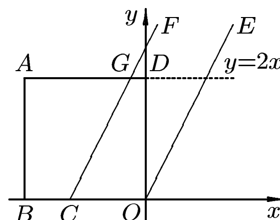


图 12

(1)当$0\leqslant t<4$时, 写出S与t的函数关系式;

(2)当$4\leqslant t\leqslant 5$时, 写出S与t的函数关系式, 在这个范围内S有无最大值? 若有, 请求出最大值; 若没有请说明理由.

简解: (1)当$0\leqslant t<4$时, 如图13, 由图可知$OM=\dfrac{a}{10}t$, 设经过t秒后, 正方形移动到A_1B_1MN, $\because$ 当$t=4$时, $BB_1=OM=\dfrac{a}{10}\times 4=\dfrac{2}{5}a$, $\therefore$ 当$t<4$时,点B_1在C点左侧, $\therefore$ 夹在两平行线间的部分是多边形$COQNG$ =平行四边形$COPG$面积$-\triangle NPQ$ 的面积.

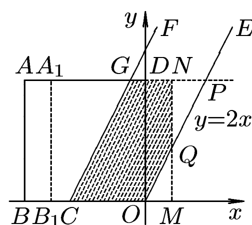


图 13

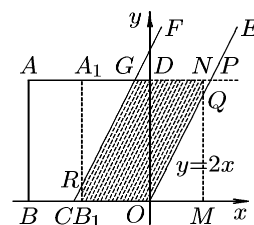


图 14

(2)当$4\leqslant t\leqslant 5$时, 如图14, 这时正方形移动到A_1B_1MN, 夹在两平行线间的部分是B_1OQNGR, 即平行四边形$COPG$被切掉了两个小三角形$\triangle NPQ$和$\triangle CB_1R$.

简评: 本题利用平移的不变性, 探索正方形$BODA$在向x轴正方向移动过程中与平行四边形$COPG$重叠部分的面积与移动时间t的关系. 考查学生对平移性质、函数知识的应用能力及分析问题、解决问题的能力.

(上接第1–28页)

(3)应建立思维反馈的习惯.从图2中可以看出思维受阻时要反馈, 思维成功时也要反馈. 反馈可以调整、修正思维的不足, 可以激发新的思维, 像思路2和6的产生那样.

(4)应进行广泛的联想.联想可以拓宽思路, 进一步挖掘事物内部的联系, 罗织出知识的网络, 像思路7那样.

边解题, 边联想

——对一道高考题的延伸探究

200063 上海市普陀区教育学院中学教研室 刘 达

2004年的上海市数学高考试题依然延续了能力立意的原则, 再次出现了一些值得教师深入研究的新题. 笔者在解答今年上海高考理科试卷第20题的同时, 自己的思维也不断被问题所激发. 这里, 仅将本人的一些探究写下来, 与各位分享"边解题, 边联想"的点滴收获.

原题是这样叙述的:

已知二次函数$y=f_1(x)$的图象以原点为顶点且过点(1,1), 反比例函数$y=f_2(x)$的图象与直线$y=x$的两个交点间距离为8, $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$.

(1) 求函数$f(x)$的表达式;

(2) 证明: 当$a>3$时, 关于x的方程$f(x)=f(a)$有三个实数解.

本题的第一小题难度不大, 只需由题设解出相应参数的值就可以最终确定函数$f(x)$的表达式, 得$f(x)=x^2+\dfrac{8}{x}$.

在解决第二小题时, 也许是出于一个数学教师对这个问题的认识, 我首先意识到关于x的方程$f(x)=f(a)$必定会有一个解, 即$x=a$, 于是自然地想到了将方程$f(x)-f(a)=0$左侧的表达式进行类似于多项式的 "因式分解", 以后的解题思路与高考评分标准的证明方法二类似.

【分析思路一】由$f(x)=f(a)$得

$$(x-a)\left(x+a-\frac{8}{ax}\right)=0,$$

可知方程的一个解$x_1=a$. 方程$x+a-\dfrac{8}{ax}=0$可化为$ax^2+a^2x-8=0$. 由于$a>3$, $\Delta=a^4+32a>0$, 所以这个一元二次方程有两个不相等的实数解. 但解到此处, 尚不能确定原方程一定有三个不同的实数解, 需要进一步分析方程$ax^2+a^2x-8=0$的两个解 $x_2=\dfrac{-a^2-\sqrt{a^4+32a}}{2a}$和$x_3=\dfrac{-a^2+\sqrt{a^4+32a}}{2a}$与$x_1=a$在题目条件下互不相等.

由于$x_2\cdot x_3=-\dfrac{8}{a}<0$, 所以只有正根$\dfrac{-a^2+\sqrt{a^4+32a}}{2a}$可能等于$a$, 因此假设$a=\dfrac{-a^2+\sqrt{a^4+32a}}{2a}$, 则有$3a^2=\sqrt{a^4+32a}$, 推出$a^4=4a\Longrightarrow a=0$或$a=\sqrt[3]{4}$, 这与$a>3$矛盾. 所以, 原方程必有三个不同的实数解.

刚完成解答时, 我感觉此题虽然有些细节学生不容易把握, 但总体而言应当难度不大, 然而学生是否能很快意识到$x=a$呢? 回顾本题所要研究的方程$x^2+\dfrac{8}{x}=a^2+\dfrac{8}{a}$, 当$x\neq 0$时, 该方程可化为一个三次方程, 在高三学生的数学学习经历中, 很少接触到三次方程求解的问题. 刚才的证法, 学生可依托的经验也许只有高中"复数初步"章节对于实系数一元多项式方程在复数范围内的根的个数研究. 需要指出的是, 以上这种解题方法考查的是高中数学常用思想方法中"函数与方程"思想的灵活运用能力. 由于缺少解题的经验, 事实上这种解法对于多数的高三学生来说是不容易想到的.

当然, 本题第二小题要求我们研究方程的解的个数, 它其实又给了我们一个运用"数形结合"思想方法解题的思维空间. 我们可将$f(x)=f(a)$移项变形, 得$x^2=-\dfrac{8}{x}+a^2+\dfrac{8}{a}$, 在同一个坐标平面内作出函数$g_1(x)=x^2$和$g_2(x)=-\dfrac{8}{x}+a^2+\dfrac{8}{a}$的图象, 然后研究两者图象交点的个数 (当然, $f(x)=f(a)$也可以移项变形得$\dfrac{8}{x}=-x^2+a^2+\dfrac{8}{a}$, 类似地研究两个函数图象的交点).

【分析思路二】图1是借助了图形计算器

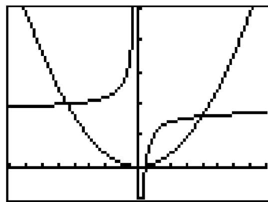


图1

作出的当$a=4$时两个函数$g_1(x)$和$g_2(x)$在同一坐标系内的图象(当然它们的草图也不难画出). 我们知道函数$g_2(x)$中的参数a对图象的影响只是上下平移, 由草图我们可知, 在$a>3$的前提下, 只需确定函数$g_1(x)$和$g_2(x)$在第一象限的图象有两个不同的交点即可. 当$x=2$时, $g_1(2)=4$, $g_2(2)=-4+a^2+\dfrac{8}{a}$, 由$a>3\Longrightarrow g_2(2)>5>g_1(2)$. 又当$x\to+\infty$时$g_2(x)=-\dfrac{8}{x}+a^2+\dfrac{8}{a}<a^2+\dfrac{8}{a}<g_1(x)$; 当$x\to 0^+$时, $g_2(x)<0<g_1(x)$. 综上可知, 函数$g_1(x)$和$g_2(x)$的图象在第一象限必有两个不同的交点.

从评分标准来看, 这种解法虽然思路比较明确, 但在"为何第一象限有两个交点"的说理表达方面要求不低, 许多学生在这里并不容易表述清楚. 由此看来, 仅就如何严谨的表达证明思路, 本题也不失为今后教学中一个良好的范例.

随着解题的深入, 一系列新的问题也开始逐渐显现, 例如:

(1) 对于第二小题所要证明的命题, $a>3$是否为结论的充要条件? 若不是, 那么该方程有三个实数解的充要条件是什么?

(2) 证明方法一中最后所得到的$a=\sqrt[3]{4}$究竟有什么意义?

(3) 函数$f(x)=x^2+\dfrac{8}{x}$的图象是什么? 如果能够确定, 那么我们不就可以通过研究函数$f(x)$的图象与常值函数$y=a^2+\dfrac{8}{a}$的交点个数来证明本题了吗?

为此, 我继续作了一番延伸探究. 其实, 以上三个问题本质上是有关联的. 为了尽快满足我对函数$f(x)=x^2+\dfrac{8}{x}$的图象的"好奇心", 我用图形计算器作出函数的部分图象(如图2). 由此猜想: 函数$f(x)=x^2+\dfrac{8}{x}$在区间$(-\infty,0)$单调递减, 而在区间$(0,+\infty)$有且仅有一个极值点. 这可用求导的方法证明(略).

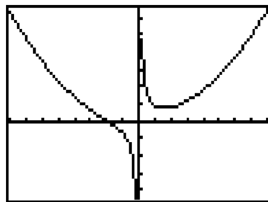


图2

当然, 函数$f(x)=x^2+\dfrac{8}{x}$的极值点我们也可以采用初等方法得到: 当$x>0$时, $x^2+\dfrac{8}{x}=x^2+\dfrac{4}{x}+\dfrac{4}{x}\geqslant 3\sqrt[3]{16}=3\cdot 4^{\frac{2}{3}}$, 当且仅当$x^2=\dfrac{4}{x}$, 即$x=\sqrt[3]{4}$时等号成立.

从$f(x)=x^2+\dfrac{8}{x}$的图象我们不难发现: 当$a<\sqrt[3]{4}$时, $f(x)=x^2+\dfrac{8}{x}$与$y=f(a)$仅一个交点; 当$a=\sqrt[3]{4}$时, $f(x)=x^2+\dfrac{8}{x}$与$y=f(a)$有两个交点; 当$a>\sqrt[3]{4}$时, $f(x)=x^2+\dfrac{8}{x}$与$y=f(a)$有三个交点.

在解决了这番疑问之后, 我不禁体会到: 首先解决本题的关键是应用了"函数与方程"、"数形结合"的思想方法. 其次这次探究归功于图形计算器的应用给我带来的启发, 尽管上海的高考暂不允许使用图形计算器. 就以这道高考题而言, 无论是应用"函数与方程"的思想还是"数形结合"的思想, 思维的核心作用并不会因计算器的出现而被削弱, 尽管也许使用图形计算器会产生解答细节或评分标准上的差别, 但本题的能力考查目标依然能够实现.

另外, 一个好的数学问题背后往往蕴含着广阔的思维空间, 中学数学的课程改革提倡让学生在学习中经历数学探究的过程、领悟数学的思想方法. 作为一个数学教师, 在高考题研究过程中, 如果都能少花一份精力去设计模拟训练题, 多花些精力去引导学生与我们一同体验数学思维的乐趣, 那么, 无论是我们自己还是我们的学生, 恐怕都会更快乐些吧.

对一道高考概率试题的探讨

710400 陕西省周至县第一中学 高伟鹏

2004年福建高考理工类试题第(18)题: 甲、乙两人参加一次英语口语考试, 已知在备选的10道试题中, 甲能答对其中的6题, 乙能答对其中的8题. 规定每次考试都从备选题中随机抽出3题进行测试, 至少答对2题才算合格. (I) 求甲答对试题数ξ的概率分布及数学期望; (II) 求甲、乙两人至少有一人考试合格的概率.

分析: 把从备选题中随机抽取三题看成是"同时"进行的, 即把一次试验看成是同时抽取3道试题. 每次试验中, 从10道备选题中抽出3道题的抽法都有C_{10}^3种. 这每一种抽法都是一个基本事件. 由于每次试验中, 各基本事件(即各种抽法)出现的可能性都是相等的. 故这个问题就成了等可能性的古典概型.

解: (I) 甲答对试题数ξ的概率分布为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{C_6^0C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{30}$	$\frac{C_6^1C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{3}{10}$	$\frac{C_6^2C_4^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{2}$	$\frac{C_6^3C_4^0}{C_{10}^3}=\frac{1}{6}$

$E\xi=\cdots=1.80$(本文中各题计算结果统一精确到0.01).

(II) (过程略, 答案为0.98).

这个题中对每个人完成一次考试的做法是: 先由被测者集中抽取3道试题(不考虑抽取顺序), 再由被测者对这3道题作答(不考虑答题顺序). 这个问题也可看作是进行不放回的3次抽答(所谓"不放回"指在对一个人的测试中, 一次抽到的题不再放入以后每一次抽题的准抽题范围). 此时有下列情况: (1) 任意两次抽测之间是相互不独立的, 这一次抽测的结果对下一次抽测答对、答不对的概率是有影响的; (2) 各次试验中答对的概率都不相同, 答不对的概率也都不相同. 所以本题可以归结为重复不独立试验模型.

$$\left(1-\frac{6}{10}\right)\cdot\left(1-\frac{6}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{6}{8}\right)=\frac{1}{30},$$

$$\frac{6}{10}\left(1-\frac{5}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{5}{8}\right)+\left(1-\frac{6}{10}\right)\frac{6}{9}\left(1-\frac{5}{8}\right)+\left(1-\frac{6}{10}\right)\left(1-\frac{6}{9}\right)\frac{6}{8}=\frac{3}{10},$$

$$\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\left(1-\frac{4}{8}\right)+\frac{6}{10}\left(1-\frac{5}{9}\right)\frac{5}{8}+\left(1-\frac{6}{10}\right)\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}=\frac{1}{6}.$$

于是得甲答对试题数ξ的概率分布为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

这个表中计算结果和原题解法中的各个对应值都是相等的. 虽然这种解法并不比原题解法更简单, 但是它提供了一种分析概率问题的方法, 这种方法有益于下列问题的解决.

例1 甲、乙两人参加一次英语口语考试, 已知在备选的10道题中, 甲能答对其中的6题, 乙能答对其中的8题, 规定每次考试都由被测者采用"抽一答一法"进行有放回的三次抽答, 至少答对2题或至少两次答对同一题算合格. (I) 求甲抽到会答题次数ξ的概率分布及数学期望(重复抽到同一个题时, 抽题次数也重复计算); (II) 求甲、乙两人至少有一人考试合格(即至少两次抽到会答题)的概率.

注: ① 所谓"有放回"即每一次抽到的题还要再放入以后每次抽题的准抽题范围. 在此, 如果用10个签表示10道题, 一个签上写一个题号, 签放在抽筒里, 那么, "抽题"就可以用"抽

(下转第1–33页)

《数学教学》2004年(总第196–207辑)总目录

第 一 期 目 录

第 二 期 目 录

第 三 期 目 录

第 四 期 目 录

第 五 期 目 录

第　六　期　目　录

第　七　期　目　录

第 八 期 目 录

第 九 期 目 录

第 十 期 目 录

第 十 一 期 目 录

第 十 二 期 目 录

(下转第1–3页)

陈省身生平

数学大师陈省身出生于浙江嘉兴, 成长于天津. 南开大学数学系毕业后, 成为清华大学的中国第一名数学硕士研究生. 1936年获德国汉堡大学博士学位, 然后到巴黎向几何大家E·嘉当求教. 1943年, 应邀到美国普林斯顿研究院, 在那里连续发表创新性论文. 于是, 一个微分几何的新时代开始了. 陈省身被誉为"现代微分几何之父". 杨振宁的诗句有"欧高黎嘉陈", 指陈省身是继欧几里得、高斯、黎曼、嘉当之后的大几何学家. 1949年之后, 在美国任数学教授. 1984年, 获世界数学最高奖之一的沃尔夫奖, 并担任南开数学所所长. 他说, 我最后的事业在中国. 建设"21世纪的数学大国"是陈省身的理想. 2002年担任北京的国际数学家大会名誉主席, 给孩子们题字:"数学好玩". 2004年12月3日, 病逝于天津.

陈省身是真诚的爱国者, 在20世纪世界科学史上占有重要位置的华人第一人.

1926年4月, 15岁的陈省身曾在扶轮中学的校刊上, 发表新诗《纸鸢》(笔者注: 纸鸢即风筝)

纸鸢啊纸鸢!
我羡你高举空中,
可是您为什么东吹西荡地不自在?
莫非是上受微风的吹动,
下受麻线的牵扯,
所以不能于青云而直上,
向平阳而直下.
但是可怜的你!
为什么这样的不自由呢?
原来你没有自动的能力,
才落得这样的苦恼.

"诗言志", 陈省身少年时代胸怀大志, 不做受人摆布的纸鸢, 愿为翱翔天空的雄鹰. 独立思考, 主动发展, 具备"自动的能力".

1979年, 陈省身在美国加州大学退休. 300多位数学家用歌声颂扬他:

向陈省身致敬, 数学的伟人;
他使得高斯–博内公式家喻户晓,
他发现了内蕴的证明,
他的真理传遍世界,
他给我们"陈类", 还有第二不变量.
纤维丛和层, 分布和叶形,
让我们大家向陈省身欢呼致敬!

~~~~~~

书 讯

《陈省身传》已于2004年8月由天津南开大学出版社出版, 作者张奠宙、王善平. 全书共二十章:

第一章　幼年时光　不做纸鸢儿
第二章　踏入南开　选择数学
第三章　步入清华　选择几何
第四章　负笈汉堡　选择卓越
第五章　追随嘉当　选择大师
第六章　抗战岁月　联大六年
第七章　普林斯顿　选择世界
第八章　上海三年　代理所长
第九章　芝加哥十年　美国几何学的复兴
第十章　伯克利年代　几何学的辉煌
第十一章　华人之光　物理与几何
第十二章　重回中国　家和万事兴
第十三章　故园情结　最后的事业在中国
第十四章　南开数学所　艰难起步
第十五章　老马识途　做"好"的数学
第十六章　"我的六个朋友"
第十七章　现代几何学
第十八章　跨入21世纪
第十九章　几何之家　劳碌的晚年
第二十章　新的坐标: 南开国际数学研究中心


~~~~~~

编后漫笔

继往开来, 争取新的胜利!

张奠宙　赵小平

时序进入2005年. 对《数学教学》来说, 这是一个特殊的年份: 创刊50周年. 我们将把今年的第7期作为特别的纪念专刊. 希望读者能够借此机会, 谈谈和《数学教学》的因缘关系, 包括批评意见, 把今后的工作做得更好.

这一期, 我们刊登了陈省身先生1985年为本刊的题词, 以及在去年11月关于数学教育的访谈记录全文, 并重新刊登了陈省身先生在本刊1995年第1期杂志上发表的"谈谈中国数学的发展"一文.

能够传递数学大师的声音和期望, 是本刊的光荣, 而实践陈省身先生的理想和建议, 更是我们的责任.

陈省身先生说, 要把中国建成数学大国. 数学大国的意思是:"要在平等独立的基础上和国际同行进行交流." 中国的数学教育在规模上肯定是世界第一. 陈省身先生也鼓励我们: "中国的数学教育在实践上肯定比美国好." 但是, 我们的实践是否能够提升为理论, 而且能够"平等独立"地和国际同行进行数学教育理论的学术交流? 似乎还不能. 于是, 当知我们努力之所在了.

《数学教学》编辑委员名单

顾　问: 曹锡华　田万海　唐瑞芬

主　编: 张奠宙　赵小平

副主编: 忻重义(常务)　邹一心　李　俊

编　委 (以汉语拼音为序):

陈德辉　陈月兰　陈志杰　程　靖　胡耀华　黄荣金

蒋鲁敏　李　俊　李士锜　万福永　汪晓勤　王继延

忻重义　熊　斌　张奠宙　赵小平　周　风　邹一心

数学教学

SHU XUE JIAO XUE

2005年第1期

(总第208期)

主编: 张奠宙　赵小平

常务副主编: 忻重义

广告许可证: 沪工商广字 07017 号

主办单位: 华东师范大学

出　　版: 《数学教学》编辑部

邮政编码: 200062(上海中山北路3663号)

印　　刷: 华东师范大学印刷厂

国内总发行: 上海市邮政局报刊发行局

国内订阅: 全国各邮电局

定价: 3.80元　国内统一刊号: CN31–1024/G4　每月12日出版　代号: 4–357